

## РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МОДЕЛІ ЕКОЛОГІЧНО ЗБАЛАНСОВАНОЇ ЕКОНОМІКИ ЗА ДОПОМОГОЮ MATLAB

Стаття присвячена особливостям комп'ютерного моделювання еколого-економічних систем. Розроблено програмне забезпечення за допомогою Matlab для дослідження моделі оптимального росту екологічно збалансованої економіки.

Данная работа посвящена особенностям компьютерного моделирования эколого-экономических систем. Разработано программное обеспечение с помощью Matlab для исследования модели оптимального роста экологически сбалансированной экономики.

This work deals with computer simulation of ecologic-economic systems. The software is developed using Matlab to investigate the optimal model of ecologically balanced growth economy.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, модель оптимального росту екологічно збалансованої економіки, оптимальний процес, траєкторія.

В умовах розвитку інформаційного суспільства будь-яке дослідження спирається на комп'ютерне моделювання. Комп'ютерне моделювання є засобом розв'язання багатьох задач та передбачає створення відповідних алгоритмічних та програмних засобів, додатків, інформаційних технологій тощо. Використання готових програмних рішень є також незамінним інструментарієм моделювання і дослідження різноманітних систем. Але для дослідження еколого-економічних систем готові програмні рішення не підходять, оскільки не враховують специфіку моделювання таких систем. Тому не менш важливо навчитися створювати нові додатки, використовуючи програмні й алгоритмічні засоби, а також можливість об'єднання модулів, розроблених у різних системах програмування [7, 3, 2, 1].

Дана праця присвячена опису розробленого комплексу програм на мові Matlab для розв'язання задачі оптимального керування динамічною економічною системою в умовах екологічної рівноваги. Matlab дозволяє розробити програмне забезпечення з використанням діалогових графічних засобів управління обчислювальним експериментом та графічних і текстових засобів відображення результатів моделювання.

Розглянемо нелінійну модель оптимального росту екологічно збалансованої економіки [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T e^{-\delta t} u(t)(1-a)f(k)dt \mapsto \max, \\ \dot{k} = \lambda(t, k(t)), \\ k(0) = k^{(0)}, k(T) \geq k^{(T)}, \\ 0 \leq u(t) \leq 1, \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $k(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  – траєкторія економічної динаміки (питомий капітал або фондоозброєність),  $e^{-\delta t}$  – дисконтуючий множник,  $u(t)$  – частка невиробничого споживання у кінцевому продукті,  $f(k)$  – неокласична виробнича функція,  $\lambda(t, k(t))$  – права частина рівняння динаміки капіталу (ця функція формується в процесі конструювання алгоритму знаходження розв'язку задачі),  $k^{(0)}$  і  $k^{(T)}$  – задані відповідно початковий та кінцевий стани економіки (ці умови є загальноприйнятими в моделях такого плану, причому  $k^{(0)}, k^{(T)} > 0$ ). Вважається, що горизонт планування  $T$  є скінченним і достатньо великим.

Щодо запропонованої моделі наведемо такі припущення: 1) витрати виробничого споживання прямо пропорційні величині валового випуску з параметром  $a$  ( $0 < a < 1$ ); 2) валовий випуск визначається за допомогою неокласичної виробничої функції, яка двічі неперервно диференційовна і лінійно однорідна; 3) амортизаційні відрахування прямо пропорційні в кожний момент часу величині відповідного капіталу; 4) трудові ресурси є екзогенною змінною зі сталим темпом зростання  $\eta = const$ ; 5) інвестиції у матеріальне виробництво та допоміжне виробництво повністю витрачаються на приріст та амортизацію відповідного капіталу; 6) інвестиції розподіляються у матеріальне виробництво та допоміжне виробництво (очисні роботи); 7) економічна система перебуває у стані стійкої екологічної рівноваги, тобто у такому стані, коли ступінь забрудненості від часу не залежить; 8) критерієм розвитку економіки на розглядуваному відрізку часу  $[0, T]$  є максимізація інтегрального дисконтованого невиробничого споживання.

Досліджувана модель (1) є задачею оптимального керування, де  $u(t)$  – керування,  $k(t)$  – фазова траєкторія,  $0 \leq t \leq T$ , тому пропонується дослідити її за допомогою достатніх умов оптимальності [5]. Для практичної реалізації побудованої моделі розроблено програмне забезпечення мовою Matlab. В основу програмного забезпечення покладено алгоритм знаходження розв'язку задачі оптимального керування. Це алгоритм дозволяє вписати всі компоненти оптимального процесу у явному аналітичному вигляді та полягає в наступних діях:

1. Вибрати тип виробничої функції  $f(k)$ , встановити її параметри, визначити похідні  $f'(k)$ ,  $f''(k)$ .

2. Перевірити умови:  $f'(k) > 0$ ;  $f''(k) < 0$ ;  $\lim_{k \rightarrow +0} f'(k) = \infty$ ;

$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ .

3. Встановити значення параметрів  $a, \alpha_1, \beta_1, \eta, \mu_e, \mu_z, \varepsilon_0 / L_0, \delta$  ( $a, \mu_e, \mu_z \in (0,1), \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \eta > 0, \varepsilon_0 > 0, \delta > 0$ ).

4. Перевірити виконання умови  $(1-a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}(\mu_z + \eta + \delta) > 0$ .

5. Розв'язати щодо  $k$  за допомогою числового методу рівняння  $\left( (1-a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}(\mu_z + \eta + \delta) \right) f'(k) - (\mu_e + \eta + \delta) = 0$  та знайти величину фондоозброєності  $\tilde{k}$ , що визначає магістральну ділянку оптимальної траєкторії.

6. Знайти величини  $u_0, u_1$  і магістральне керування  $\tilde{u}(t)$  згідно з формулою

$$\tilde{u}(t) = u_0 + u_1 e^{-\eta t}, \quad (2)$$

$$\text{де } u_1 = \frac{\mu_z \varepsilon_0}{\beta_1 L_0 (1-a) f(\tilde{k})}, \quad u_0 = 1 - \frac{\alpha_1 (\mu_z + \eta)}{\beta_1 (1-a)} - \frac{(\mu_e + \eta) \tilde{k}}{(1-a) f(\tilde{k})}.$$

7. Перевірити, чи при знайденому  $\tilde{k}$  виконуються умови  $u_0 \geq 0$ ;  $u_0 + u_1 \leq 1$ .

8. Задати початковий стан, тобто момент часу  $t_0$ , і початкове значення фондоозброєності  $k^{(0)}$ .

9. Визначити кінцевий бажаний стан, тобто  $t = T$  і  $k^{(T)}$ .

10. Знайти найбільшу досяжну величину фондоозброєності  $\hat{k}$ , розв'язавши рівняння  $\left( (1-a) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}(\mu_z + \eta) \right) \frac{f(k)}{k} - (\mu_e + \eta) = 0$ .

11. Перевірити, чи досліджувана динамічна еколого-економічна система дозволяє досягнути запланованої величини фондоозброєності, тобто, чи виконується умова  $0 < \max(\tilde{k}, k^{(T)}) < \hat{k}$ .

12. Знайти  $\bar{k} = \min(\tilde{k}, k^{(0)})$  і перевірити, чи виконується умова

$$\frac{\mu_z \varepsilon_0}{\beta_1 L_0} < \frac{\alpha_1}{\beta_1} (\mu_z + \eta) f(\bar{k}) + (\mu_e + \eta) \bar{k}.$$

13. Якщо  $k^{(0)} < k^{(T)}$ , тоді вибрати керування  $u = 0$ , що приводить до зростання фондоозброєності (інакше необхідно брати  $u = 1$ ).

14. Розв'язавши диференціальне рівняння  $\dot{k}(t) = \lambda(t, k(t))$  при початкових умовах  $t_0, k^{(0)}$  та  $t > t_0$ , знайти граничну траєкторію  $k_\Lambda(t)$ .

15. Розв'язавши диференціальне рівняння  $\dot{k}(t) = \lambda(t, k(t))$  при початкових умовах  $t = T, k^{(T)}$  та  $t < T$ , знайти граничну траєкторію  $k_\Pi(t)$ .

16. Застосовуючи сплайн-апроксимацію  $k_\Lambda(t)$ , за допомогою числового методу розв'язати щодо  $t$  рівняння  $k_\Lambda(t) = \tilde{k}$ . Цей розв'язок – лівий момент  $\tau^*$  переключення оптимального керування.

17. Застосовуючи сплайн-апроксимацію  $k_\Pi(t)$ , за допомогою числового методу розв'язати щодо  $t$  рівняння  $k_\Pi(t) = \tilde{k}$ . Цей розв'язок – правий момент  $\tau^{**}$  переключення оптимального керування.

18. Сформувати оптимальний процес за правилом:

❖ вибравши величину керування згідно з п. 13, перевести керовану систему із стану  $(t_0, k^{(0)})$  протягом проміжку часу  $[t_0, \tau^*]$  в стан  $(\tau^*, k_\Lambda(\tau^*)) = \tilde{k}$ ;

❖ вибравши керування  $\tilde{u}(t)$ , визначене згідно з (2), перевести керовану систему із стану  $(\tau^*, k_\Lambda(\tau^*))$  протягом проміжку часу  $[\tau^*, \tau^{**}]$  в стан  $(\tau^{**}, k_\Pi(\tau^{**})) = \tilde{k}$ ;

❖ вибравши величину керування згідно з п. 13, перевести керовану систему з стану  $(\tau^{**}, k_\Pi(\tau^{**}))$  протягом проміжку часу  $[\tau^{**}, T]$  в стан

$$(T, k^{(T)}).$$

Описаний вище алгоритм задає порядок обчислень границь проміжків часу  $[t_0, \tau^*]$ ,  $[\tau^*, \tau^{**}]$ ,  $[\tau^{**}, T]$ , протягом яких необхідно вибирати три різні величини керування, що приведе до оптимального переходу керованої системи з початкового стану в кінцевий. Для практичного використання алгоритму необхідно визначити моменти часу зміни обсягів фондоозброєності  $\tau^*$ ,  $\tau^{**}$  і, вибираючи величину керування згідно з п. 18, отримати оптимальний процес.

З економічного погляду, суть цього оптимального керування еколого-економічною динамікою полягає у плануванні частки невиробничих витрат у вартості одиниці кінцевого випуску. Протягом першого й третього проміжків часу ця частка є або максимальною, або мінімальною. Протягом середнього проміжку часу (проходження по магістралі) величина невиробничих витрат має бути спланована згідно з (2).

Алгоритм апробовано на конкретному прикладі, в якому за реальними статистичними даними побудовано виробничу функцію  $f(k) = 0,9714k^{0,4225}$  [6].

Для управління обчислювальним експериментом та графічних і текстових засобів відображення результатів моделювання оптимального росту екологічно збалансованої економіки (1) за вищезапропонованим алгоритмом розроблено програмне забезпечення мовою Matlab з використанням діалогових графічних засобів. Розроблений інтерфейс управління обчислювальними експериментами з моделлю (1) показано на рис. 1.

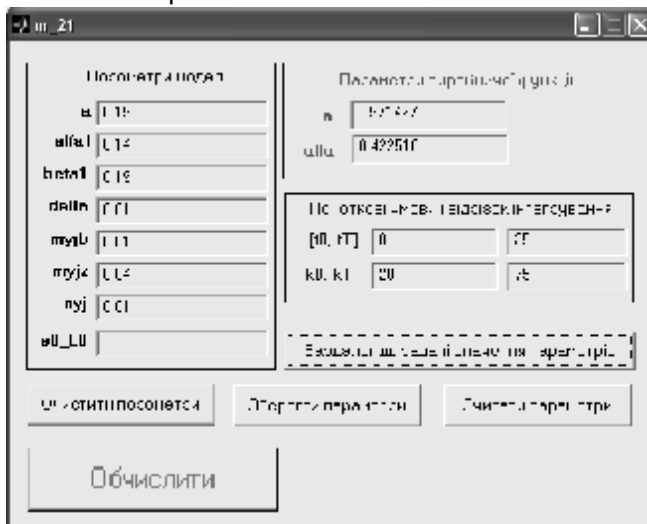


Рис. 1. Інтерфейс управління обчислюваними експериментами моделі (1)

Оптимальна траєкторія моделі (1) проілюстрована на рис. 2.

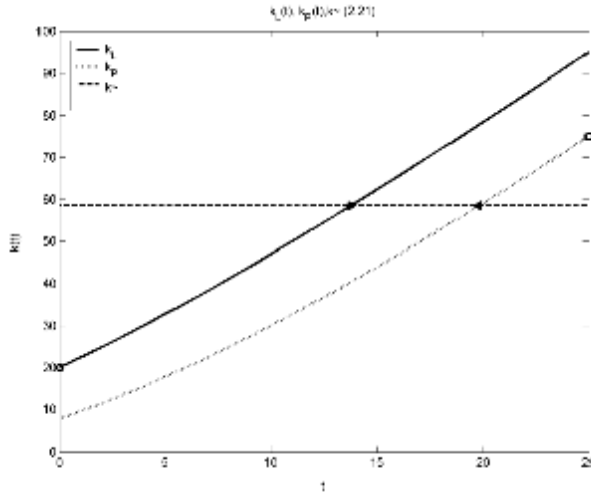


Рис. 2. Ілюстрація оптимальної траєкторії еколого-економічної моделі (1)

На проміжку часу  $[0, 25]$  з початкового стану  $k^{(0)} = 20$  можна потрапити на магістраль в момент часу  $\tau^* = 13,76$ , а для того щоб досягти бажаного кінцевого стану  $k^{(T)} = 75$ , потрібно зійти з магістралі в момент часу  $\tau^{**} = 19,77$ . При цьому на відрізках часу  $[0; 13,76]$  і  $[19,77; 25]$  частка невиробничих витрат у вартості кінцевого випуску є мінімальна (рис. 2).

Побудована нелінійна модель оптимального росту екологічно збалансованої економіки дозволяє планувати експерименти з дослідження залежностей оптимальних розв'язків від параметрів, що входять у модель – параметрів виробничих функцій, параметрів системи моделюючих рівнянь, початкових умов, кінцевого (бажаного планового) значення керованої величини. У зв'язку з цим було розроблено комплекс програм управління обчислювальними експериментами з розробленими моделями, які призначені для встановлення залежностей  $k_A(t)$ ,  $k_P(t)$ ,  $\tilde{k}$ ,  $\tau^*$ ,  $\tau^{**}$ ,  $K^*$  від параметрів, що входять у моделюючі рівняння.

Для моделі (1) досліджено, як залежать траєкторії  $k_A$ ,  $k_P$ ,  $\tilde{k}$  і точки  $\tau^*$ ,  $\tau^{**}$  від параметрів моделі  $a$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\delta$ ,  $\mu_g$ ,  $\mu_z$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon_0/L_0$  у деяких межах, визначених умовами існування моделі.

З'ясувалося, що в результаті зміни параметрів моделі в допустимих межах відбуваються явища, що сприяють або ускладнюють практичне розв'язання поставленої задачі керування, а також розкривають суть модельованого

еколого-економічного явища.

Опишемо ситуацію залежності траекторій і точок переключення від зміни параметра  $a$  – частки виробничих витрат (рис. 3). Рис. 3 ілюструє зниження фондоозброєності  $\tilde{k}$ , потрібної для оптимального переходу в кінцевий стан, а також скорочення часу переходу магістралю сталого  $\tilde{k}$ . Це видно з ілюстрації декількох розв'язків моделі (1) при різних значеннях параметра  $a$ . У збільшеному вигляді зміщення лівої  $\tau^*$  й правої  $\tau^{**}$  точок переключення магістралі показано на рис. 5, 6.

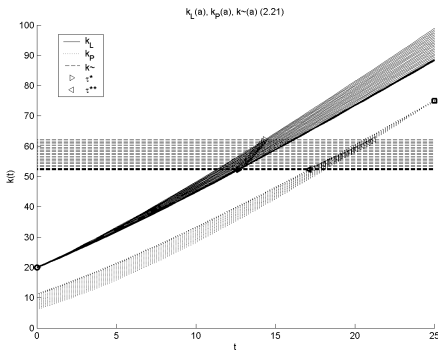


Рис. 3. Ілюстрації залежності оптимальних траекторій моделі (1) від частки виробничого споживання  $a$

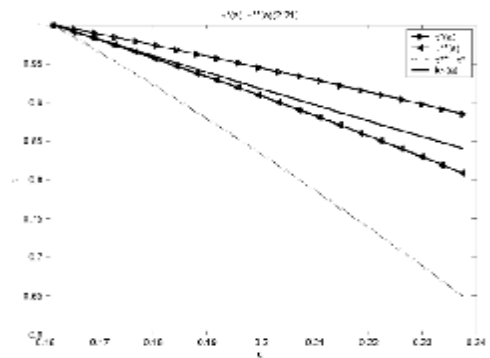


Рис. 4. Графіки залежностей  $\tau^*$ ,  $\tau^{**}$ ,  $(\tau^{**} - \tau^*)$ ,  $\tilde{k}$  від параметра  $a$

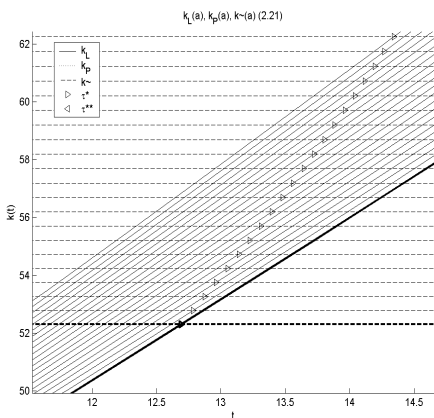


Рис. 5. Залежна від параметра  $a$  область значень  $\tau^*$  моделі (1)

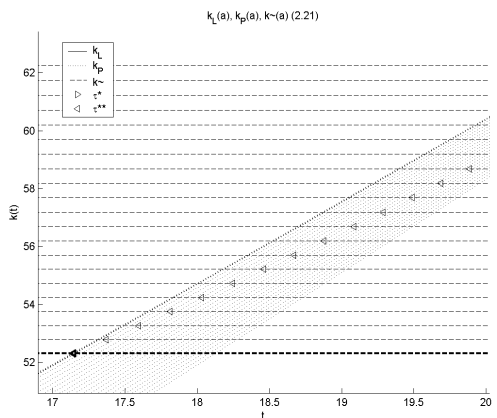


Рис. 6. Залежна від параметра  $a$  область значень  $\tau^{**}$  моделі (1)

Аналізуючи отримані ілюстрації, можна зробити висновок, що збільшення частки виробничого споживання сприяє зниженню значення фондоозброєності

$\tilde{k}$ , потрібної для оптимального переходу в кінцевий стан, а також викликає зсув точок  $\tau^*$  та  $\tau^{**}$  вліво, що призводить у проілюстрованому випадку до незначного скорочення часу проходження оптимальною магістраллю  $(\tau^{**} - \tau^*)$ . Встановлену експериментально залежність  $\tau^*(a)$ ,  $\tau^{**}(a)$ ,  $\tilde{k}(a)$ , а також  $(\tau^{**} - \tau^*)$  проілюстровано на рис. 4.

Зміна параметрів  $\alpha_1$ ,  $\eta$  і  $\mu_e$  в еколого-економічній моделі (1) викликає таку ж варіацію траєкторій  $k_\Lambda$ ,  $k_\Pi$ ,  $\tilde{k}$  та точок  $\tau^*$ ,  $\tau^{**}$ , як і у випадку залежності від параметра  $a$ . Значення фондоозброєності  $\tilde{k}$  та час проходження магістраллю  $(\tau^{**} - \tau^*)$  зменшуються.

Дещо інший вплив на еколого-економічну систему має варіація показника  $\beta_1$  від його величини. Оскільки  $\beta_1$  імітує „екологічну стривоженість” й представляє природоохоронні домінанти в господарській поведінці, тому, закономірно, збільшення цієї величини має покращувати умови запланованого оптимального керування. Справді, експерименти зі зміною параметра  $\beta_1$  у моделі (1), підтверджують це. Збільшення  $\beta_1$  приводять до росту  $\tilde{k}$ , що тут відображає збільшення фондоозброєності у природоохоронну роботу, і до одночасного збільшення часу  $(\tau^{**} - \tau^*)$ , що відображає закономірну довшу тривалість проходження оптимальною магістраллю. Величини  $\tilde{k}(\beta_1)$ ,  $\tau^{**}(\beta_1)$ ,  $\tau^*(\beta_1)$  зростають сповільнено, що показує обмеженість застосування величини  $\beta_1$  як важеля впливу на покращення умов розв’язання поставленої задачі оптимального керування.

Зміна показника  $\delta$  майже не впливає (в експерименті не вдалося виявити цей вплив) на зміщення траєкторій  $k_\Lambda(t)$ ,  $k_\Pi(t)$ , тому збільшення  $\delta$  приводить до зміщення границь відрізка  $[\tau^*, \tau^{**}]$  лише через вплив на  $\tilde{k}$ . Причому на всій області припустимих значень  $\delta$  і  $\tilde{k}$  зв’язані пропорційною залежністю. Чим вище споживання, тим нижче  $\tilde{k}$  й коротший відрізок  $[\tau^*, \tau^{**}]$ , тобто показник споживання впливає на умови оптимального керування так само, як й інші показники економічної продуктивності ( $a$ ,  $\alpha_1$ ,



$\eta, \mu_\epsilon$ ), з тією різницею, що він не впливає на траєкторії  $k_\Lambda(t), k_\Pi(t)$ .

Зміна параметра  $\mu_z$  (коефіцієнт амортизації переробки відходів), викликає таку ж якісну залежність поведінки досліджуваної еколого-економічної системи, як і описаний вище вплив варіації параметрів  $(a, \alpha_1, \eta, \mu_\epsilon)$ , але час проходження магістраллю збільшується, графік  $(\tau^{**} - \tau^*)$  зростає.

Зміна відношення  $\epsilon_0/L_0$  впливає на траєкторії  $k_\Lambda(t), k_\Pi(t)$ . Траєкторія  $k_\Lambda(t)$  зміщується вліво, а траєкторія  $k_\Pi(t)$  – вправо при збільшенні  $\epsilon_0/L_0$ , рівень  $\tilde{k}$  при цьому залишається сталим. Отже, тривалість відрізка часу залежить лише від деформації траєкторій  $k_\Lambda(t), k_\Pi(t)$ , що загалом приводить до збільшення відрізка часу  $[\tau^*, \tau^{**}]$ . Економічний зміст цього полягає в тому, що вища питома кількість відходів, які припадають на одного працюючого в початковий момент часу, пізніше вимагатиме тривалішого часу переходу в потрібний стан з відповідною інтенсивністю їх переробки. Закономірно, що величина  $\epsilon_0/L_0$  не впливає на рівень  $\tilde{k}$ , адже вона відображає інтенсивність накопичення відходів у початковий момент часу.

Описані вище експериментальні дослідження виконані за допомогою програми мовою Matlab з графічним інтерфейсом користувача. Вигляд інтерфейсу управління експериментами показано на рис. 7.

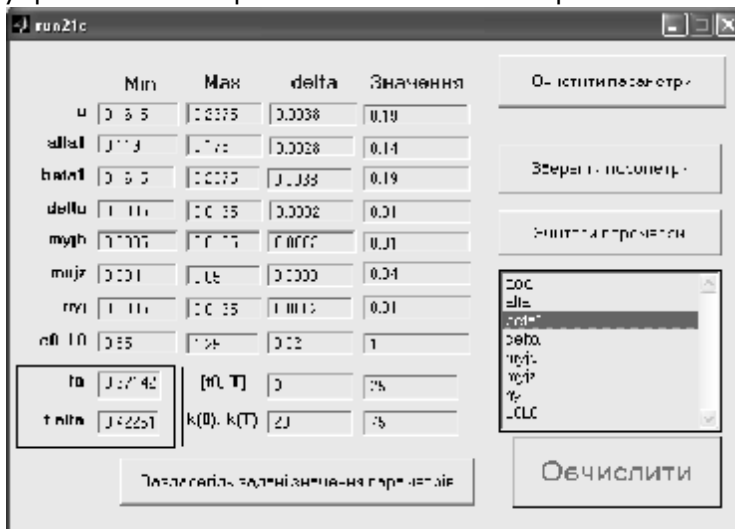


Рис. 7. Інтерфейс управління експериментами з моделлю (1) при дослідженні залежностей оптимальних траєкторій від параметрів моделі

Виконаний аналіз розв'язків моделі оптимального керування (7) свідчить, що крім знаходження найбільш ефективного методу переходу з початкового стану в кінцевий бажаний стан, модель також придатна для дослідження впливу окремих її параметрів на умови такого переходу. Експериментально встановлено, що кожен із параметрів моделі має доволі вузьку область прийнятних значень (рис. 7). Параметри, що виступають як показники продуктивності ( $a, \alpha_1, \delta, \mu_g, \eta$ ), справляють двоякий вплив на особливості оптимального керування виробництвом й переробкою відходів – їх збільшення викликає зниження  $\tilde{k}$  й скорочує тривалість „руху магістраллю”. Це приводить до багатокритеріальної задачі керування параметрами моделі в рамках розв'язаної задачі оптимального керування величиною частки невиробничих витрат у одиниці кінцевого випуску.

Отже, розроблене програмне забезпечення запропонованої у статті моделі оптимального росту екологічно збалансованої економіки є цілісним комп'ютерно-інформаційним інструментарієм для економіко-математичного дослідження динамічних економічних процесів за наявності стійкої еколого-економічної рівноваги. Створена система комп'ютерного моніторингу може бути використана як інструмент підтримки прийняття рішень і є основою для створення комплексу засобів дослідження еколого-економічних явищ, зокрема при проектуванні бізнес-планів виробничих підприємств в умовах екологічної рівноваги, при розробці заходів державного еколого-економічного регулювання тощо.

### Список використаних джерел:

1. Вінничук О. Ю. Експериментальне дослідження моделі еколого-економічного росту / О. Ю. Вінничук // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. Економіка. – 2009. – Вип. 494. – С. 144–151.
2. Вінничук О. Ю. Комп'ютерне моделювання еколого-економічної динаміки / О. Ю. Якутова // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції [«Dynamical system modelling and stability investigation»], (Київ, 27–29 травня 2009 р.). – К.: ДП «Інформаційно-аналітичне агенство», 2009. – С. 325.
3. Григорків В. С. Інструментальні засоби дослідження моделей еколого-економічної динаміки / В. С. Григорків, О. Ю. Якутова // Матеріали Всеукраїнської школи-семінару [„Сучасні інформаційні технології в економіці та досвід їх використання в навчальному процесі”], (Чернівці, 28 лютого – 1 березня 2008 р.). – Чернівці : ДрукАрт, 2008. – С. 54–55.
4. Григорків В. С. Моделирование экономической динамики в условиях экологического равновесия / Григорків В. С., Якутова Е. Ю., Тымку С. Н. // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 3. – С. 130–138.
5. Основы теории оптимального управления / [Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лобанов С. М. и др.] ; под ред. В. Ф. Кротова. – М. : Высшая школа, 1990. – 430 с.
6. Офіційний сайт державного комітету статистики України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.ukrstat.gov.ua>.
7. Якутова О. Ю. Про комп'ютерний моніторинг моделей еколого-економічної динаміки / О. Ю. Якутова // Тези доповідей XII Всеукр. наук.-метод. конф. [Львів, „Проблеми економічної кібернетики”], (3–5 жовтня 2007р.). – Львів : ЛНУ, 2007. – С. 253–254.