УДК 519.866:330.115

М.В.Бойчук, к.ф.-м.н.,
Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича,
А.Р.Семчук, к.ф.-м. н.,
Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ,
м. Чернівці

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕКОНОМІКИ ІЗ НЕЛІНІЙНИМ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИМ КРИТЕРІЄМ ТА ЗАПІЗНЕННЯМ

Запропоновано стохастичну модель економіки із нелінійним еколого-економічним критерієм та запізненням для вінерівських процесів.

Предложена стохастическая модель экономики с нелинейным эколого-экономическим критерием та запаздыванием для винеровских процессов.

The stochastic model of the economy with nonlinear ecological-economic criteria and lagging for Wiener processes is proposed.

Ключові слова: стохастична модель, еколого-економічний критерій, запізнення, інвестиції, споживання, стохастичні та середні магістральні керування, стохастичні та середні магістралі, стохастичні та середні праві траєкторії, праві керування, правий момент перемикання керувань.

Оскільки економічне виробництво забруднює природне середовище, то актуальним є врахування витрат на очищення цього середовища. Моделі, які враховують не тільки випуск продукції, але і забруднення та його рух, називаються еколого-економічними. Саме такі моделі досліджують розвиток економіки з урахуванням екологічного фактора. Відомо, що еколого-економічні показники є випадковими, а деякі з них, для спрощення математичної моделі, не враховуються, тоді доводиться мати справу з випадковими процесами. А це означає, що актуальними є, як у теоретичному, так і в практичному планах, дослідження стохастичних (випадкових) еколого-економічних систем.

У роботі [1] запропоновано динамічну модель еколого-економічної взаємодії на макрорівні у детермінованому варіанті та без запізнення. Причому у цій моделі не враховані такі показники, як валова продукція з її обмеженням і виробниче споживання (немає повного циклу однопродуктової економіки зростання [2]) при лінійній однорідній виробничій функції та не описаний алгоритм побудови крайових керувань.

Метою даної статті є дослідження динамічної еколого-економічної моделі із вінерівським процесом та урахуванням таких основних економічних показників, як виробниче споживання та валова продукція з її обмеженням і запізненням, яке в економіці називається лагом. Описаний алгоритм побудови правих керувань і відповідних правих траєкторій при однорідній, степеня $\nu \in (0;2)$, макровиробничій функції.

Спершу формалізуємо детерміновану модель еколого-економічної взаємодії із запізненням, а потім – на її основі, стохастичну модель.

ДЕТЕРМІНОВАНА МОДЕЛЬ

Сформулюємо припущення для побудови моделі.

Припущення 1. Валова продукція X є сумою кінцевої продукції Y та виробничого споживання W у момент часу $t-\tau$ (t – часова змінна, τ –

запізнення):

$$X(t-\tau)=Y(t-\tau)+W(t-\tau),\;\; t\in[t_0,T].$$

Нехай виробниче споживання W становить частку $a=const\in(0;1)$ від валової продукції X

$$W(t-\tau)=aX(t-\tau).$$

Тоді кінцева продукція Y виглядатиме так:

$$Y(t-\tau)=(1-a)X(t-\tau). \qquad (1)$$

Припущення 2. Інвестиції повністю розподіляються у матеріальне виробництво і на очисні споруди:

$$I(t-\tau)=I_{MB}(t-\tau)+I_{OC}(t-\tau). \qquad (2)$$

Припущення 3. Кінцева продукція Y є сумою загальних інвестицій I, невиробничого споживання C, урядових витрат Ur, оподаткування Op та витрат на сальдо (експорт Ex мінус імпорт Im):

$$Y(t-\tau)=I(t-\tau)+C(t-\tau)+Ur(t-\tau)+Op(t-\tau)+\left[Ex(t-\tau)-Im(t-\tau)\right].$$

Нехай сумарні урядові витрати Ur, оподаткування Op, витрати на сальдо (експорт Ex мінус імпорт Im) складають частку $w\in(0;1)$ від кінцевої продукції Y:

$$Ur(t-\tau)+Op(t-\tau)+\left[Ex(t-\tau)-Im(t-\tau)\right]=wY(t-\tau).$$

Тоді сумарні інвестиції I та невиробниче споживання C рівні:

$$I(t-\tau)+C(t-\tau)=(1-w)Y(t-\tau).$$

Припустимо, що невиробниче споживання C становить частку s від $(1-w)Y$:

$$C(t-\tau)=s(t-\tau)(1-w)Y(t-\tau)=(1-w)(1-a)s(t-\tau)X(t-\tau), \qquad (3)$$

де $0\le s\le 1$.

На загальні інвестиції I припадає:

$$I(t-\tau)=\left(1-s(t-\tau)\right)(1-w)Y(t-\tau)=(1-w)(1-a)\left(1-s(t-\tau)\right)X(t-\tau). \quad (4)$$

Якщо s_{MB} є нормою накопичення виробничого капіталу, то $s_{OC}=1-s-s_{MB}$ – норма накопичення капіталу, який використовується на очисні роботи. Тоді інвестиції є такими:

$$I_{MB}(t-\tau)=(1-w)(1-a)s_{MB}(t-\tau)X(t-\tau),$$

$$I_{OC}(t-\tau)=(1-w)(1-a)\left[1-s(t-\tau)-s_{MB}(t-\tau)\right]X(t-\tau).$$

Припущення 4. Амортизації капіталу A_{MB} і A_{OC} прямо пропорційні його величині:

$$A_{MB}\left(t\right)=\mu_{MB}K_{MB}\left(t\right),\;\;A_{OC}\left(t\right)=\mu_{OC}K_{OC}\left(t\right), \tag{5}$$

де μ_{MB} – норма амортизації матеріального виробництва, μ_{OC} – норма амортизації очисних робіт ($0<\mu_{MB},\mu_{OC}<1$), K_{MB} – капітал матеріального виробництва, K_{OC} – капітал очисних споруд.

Припущення 5. Для інвестицій виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}I_{MB}\left(t-\tau\right)&=\dot{K}_{MB}\left(t\right)+\mu_{MB}K_{MB}\left(t\right),\\ I_{OC}\left(t-\tau\right)&=\dot{K}_{OC}\left(t\right)+\mu_{OC}K_{OC}\left(t\right),\end{aligned}, \tag{6}$$

де $\dot{K}\left(t\right)\equiv {d}/{dt}\,K\left(t\right)$ – чисті інвестиції (чистий прибуток).

Припущення 6. На валову продукцію X накладається обмеження [2]

$$0\le X\left(t-\tau\right)\le F\left(K_{MB}\left(t-\tau\right),L\left(t-\tau\right)\right). \tag{7}$$

Виробнича функція F залежить від розмірів капіталу в матеріальне виробництво $K_{MB}\ge 0$ та робочої сили $L\ge 0$ і має властивості: двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча, угнута по кожному із аргументів при $K_{MB}>0$ і $L>0$, однорідна степеня $\nu\in\left(0;2\right)$ [3].

$$F\left(\lambda K_{MB},\lambda L\right)=\lambda^{\nu}F\left(K_{MB},L\right)=\lambda^{\nu}F\left(K_{MB},L\right),\;\;\forall\lambda>0 \tag{8}$$

та виконуються граничні рівності $\lim\limits_{K\to 0}F_K'\left(K,L\right)=\infty$, $\lim\limits_{K\to\infty}F_K'\left(K,L\right)=0$ для $\forall L>0$.

Взявши $\lambda=L^{-1}$, із (8) одержимо

$$F\left(K_{BM},L\right)=L^{\nu}F\left({K_{BM}}/{L},1\right)=L^{\nu}f\left(k\right),\;\;k={K_{BM}}/{L},\;\;\nu\in\left(0;2\right).$$

Нова функція f характеризує продуктивність праці (випуск валової продукції на одного працюючого) і як наслідок функції F має такі властивості:

$$f'\left(k\right)>0,\;\;f''\left(k\right)<0,\;\;\lim_{k\to 0}f'\left(k\right)=\infty,\;\;\lim_{k\to\infty}f'\left(k\right)=0. \tag{9}$$

Робоча сила L є екзогенною змінною зі сталим темпом зростання η та підпорядкована експоненціальному законові

$$L\left(t\right)=L_0e^{\eta\left(t-t_0\right)},\;\;L_0\equiv const. \tag{10}$$

Припущення 7. Для забруднення Z виконується рівняння руху забруднення:

$$\dot{Z}\left(t\right)=dY\left(t-\tau\right)-rK_{OC}\left(t\right)-\gamma Z\left(t\right),$$

де d – частка виробничого забруднення від загального обсягу кінцевої продукції, r – кількість одиниць забруднення, які знищуються одиницею капіталу, γ – коефіцієнт асиміляції забруднення.

Введемо питомі показники: $x = X/L$, $k_{OC} = K_{OC}/L$, $z = Z/L$.

Припущення 1-7 насправді формують основні рівняння моделі в питомих показниках:

$$
\begin{aligned}
&\dot{k}(t) = (1-a)(1-w)s_{MB}(t-\tau)x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big)e^{-\eta\tau} - (\mu_{MB}+\eta)k(t),\\
&\dot{k}_{OC}(t) = (1-a)(1-w)\big[1-s(t-\tau)-s_{MB}(t-\tau)\big]x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big)e^{-\eta\tau} -\\
&\qquad -(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}(t),\\
&\dot{z}(t) = d(1-a)x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big)e^{-\eta\tau} - rk_{OC}(t) - (\gamma+\eta)z(t),\\
&0 \le x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big) \le L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)}f\big(k(t-\tau)\big),\\
&0 \le s_{MB}(t-\tau) \le 1-s(t-\tau) \le 1.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

До (11) додаються умови на початкові стани питомого капіталу на матеріальне виробництво, на очисні споруди, забруднення та передісторія руху питомого капіталу в матеріальне виробництво:

$$
k_{OC}(t_0) = k_{OC}^{(0)},\;\; z(t_0) = z_0,\;\; k(\Theta) = \phi_0(\Theta),\;\; \Theta \in [t_0-\tau, t_0], \tag{12}
$$

а також обмеження на кінцеві стани:

$$
k_{OC}(T) \ge k_{OC}^{(T)},\;\; z(T) \le z_T,\;\; k(T) \ge k_T. \tag{13}
$$

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ

Нехай $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ – імовірнісний простір із потоком σ-алгебр $\mathscr{F}_t \subset \sigma$, $t \in [t_0, T]$, $\xi(t) = \big(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\big) \in IR^3$ $-\mathscr{F}_t$ – вимірний вінерівський процес, P – міра (ймовірність), Ω – множина елементарних подій [4], $\xi_i(t,\omega) \equiv \xi_i(t)$, $i = 1,2,3$. Випадкові функції $k(t) \equiv k(t,\omega)$, $k_{OC}(t) \equiv k_{OC}(t,\omega)$, $z(t) \equiv z(t,\omega)$ визначені на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$.

Керована стохастична система із запізненням описується стохастичними рівняннями Іто [4]

$$
\begin{cases}
\dot{k}(t) = (1-a)(1-w)s_{MB}(t-\tau)x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big)e^{-\eta\tau} - (\mu_{MB}+\eta)k(t) + n_1(t)\dot{\xi}_1(t),\\
\dot{k}_{OC}(t) = (1-a)(1-w)\big[1-s(t-\tau)-s_{MB}(n-\tau)\big]x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big)e^{-\eta\tau} -\\
\qquad -(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}(t) + n_2(t)\dot{\xi}_2(t),\\
\dot{z}(t) = d(1-a)x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big)e^{-\eta\tau} - rk_{OC}(t) - (\gamma+\eta)z(t) + n_3(t)\dot{\xi}_3(t),
\end{cases}
\tag{14}
$$

з обмеженнями на керування

$$
\begin{aligned}
&0 \le x\big(t-\tau, k(t-\tau)\big) \le L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)}f\big(k(t-\tau)\big),\\
&0 \le s_{MB}(t-\tau) \le 1-s(t-\tau) \le 1,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

з початковими умовами

$$k\left(t_0\right)=k_0,\ k_{OC}\left(t_0\right)=k_{OC}^{(0)},\ z\left(t_0\right)=z_0,\ k\left(\Theta\right)=\phi_0\left(\Theta\right),\ \Theta\in\left[t_0-\tau,t_0\right],$$
$$k_0\in\mathscr{F}_{t_0},\ z_0\in\mathscr{F}_{t_0},\ \phi_0\left(\Theta\right)\in\mathscr{F}_{\Theta},\ \Theta\in\left[t_0-\tau,t_0\right] \quad (16)$$

та з обмеженнями на кінцеві стани

$$k_{OC}\left(T\right)\ge k_{OC}^{(T)},\ z\left(T\right)\le z_T,\ k\left(T\right)\ge k_T, \quad (17)$$

де функції n_1, n_2 та n_3 є кусково-неперервними на $\left[t_0,T\right]$, ϕ_0 – кусково-неперервна на $\left[t_0-\tau,t_0\right]$; ξ_1, ξ_2 і ξ_3 – незалежні вінерівські процеси з нульовими математичними сподіваннями $M\xi_i\left(t\right)=0$, $i=1,\ 2,\ 3$ та з щільностями розподілу $\rho_k=\left(2\pi b_k t\right)^{-0.5}e^{-k^2/(2b_k t)}$, $\rho_{k_{OC}}=\left(2\pi b_{k_{OC}}t\right)^{-0.5}e^{-k_{OC}^2/\left(2b_{k_{OC}}t\right)}$ та $\rho_z=\left(2\pi b_z t\right)^{-0.5}e^{-z^2/(2b_z t)}$, $b_k>0$, $b_{k_{OC}}>0$, $k_z>0$.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб із множини допустимих керувань (15) необхідно вибрати керування s_{MB} і s, які б надавали скалярному функціоналу найбільшого значення:

$$M_{t\phi}\int_t^T e^{-\delta(t-t_0)}\left\{\left(1-a\right)\left(1-w\right)s\left(t-\tau\right)x\left(t-\tau,k\left(t-\tau\right)\right)L_0\times\right.$$
$$\left.\times e^{\eta(t-t_0-\tau)}+Q\left(L_0e^{\eta(t-t_0)}z\left(t\right)\right)\right\}dt\to\sup_{s_{MB},s}, \quad (18)$$

де $M_{t\phi}$ – умовне математичне сподівання, яке обчислюється при умові, що траєкторія $k\left(s-\tau\right)$ збігається із певною кусково-неперервною функцією $\phi\left(s\right)$ при $s\le t$, тобто $k\left(t-\tau\right)\equiv\phi\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$, δ – норма дисконту, функція $Q\left(Z\right)$ характеризує корисність від забруднення і володіє наступними властивостями: двічі неперервно-диференційовна та $Q\left(0\right)=0$, $Q\left(Z\right)<0$, $Q'\left(Z\right)<0$, $Q''\left(Z\right)<0$ та існує неперервна $Q'''\left(Z\right)$ при $Z>0$; $x\left(t-\tau\right)\equiv x\left(t-\tau,k\left(t-\tau\right)\right)$, $Z=L_0e^{\eta(t-t_0)}z$.

ДОСЛІДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНОЇ МОДЕЛІ (14)-(18)

За достатніми умовами оптимальності для стохастичних систем [5] запишемо рівняння Беллмана:

$$\inf_{s_{MB},s}\left\{\frac{\partial}{\partial t}V\left(t,k,k_{OC},z,\varphi\right)+\left[\left(1-a\right)\left(1-w\right)s_{MB}\left(t-\tau\right)x\left(t-\tau,\varphi\right)e^{-\eta\tau}-\left(\mu_{MB}+\eta\right)k\right]\times\right.$$
$$\times\frac{\partial}{\partial k}V\left(t,k,k_{OC},z,\varphi\right)+\left[\left(1-a\right)\left(1-w\right)\left[1-s\left(t-\tau\right)-s_{MB}\left(t-\tau\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times x\left(t-\tau,\varphi\right)e^{-\eta\tau}-\left(\mu_{OC}+\eta\right)k_{OC}\right]\frac{\partial}{\partial k_{OC}}V\left(t,k,k_{OC},z,\varphi\right)+$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[d(1-a)x(t-\tau,\varphi)e^{-\eta\tau}-rk_{OC}-(\gamma+\eta)z\right]\frac{\partial}{\partial z}V(t,k,k_{OC},z,\varphi)+\\
&+0.5n_1^2(t)\frac{\partial^2}{\partial k^2}V(t,k,k_{OC},z,\varphi)+0.5n_2^2(t)\frac{\partial^2}{\partial k_{OC}^2}V(t,k,k_{OC},z,\varphi)+\\
&+0.5n_3^2(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}V(t,k,k_{OC},z,\varphi)-e^{-\delta(t-t_0)}U\big((1-a)(1-w)s(t-\tau)\times\\
&\times L_0x(t-\tau,\varphi)e^{\eta(t-t_0-\tau)}\big)-e^{-\delta(t-t_0)}Q\left(L_0e^{\eta(t-t_0)}z\right)\Big]\Big\}=0,\quad V\left(T,k_T,z_T,\varphi(T)\right)=0,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

де функція V – неперервно-диференційовна один раз по t та двічі по k, k_{OC}, z при майже всіх $t\in[t_0,T]$, $\varphi\ge 0$, $k\ge 0$, $k_{OC}\ge 0$, $z\ge 0$, а $\varphi(t)\equiv k(t-\tau)$, $t\in[t_0,T]$.

Оскільки змінні x, xs_{MB} та xs є незалежними на рівні оптимізації, то із (19) можна виділити задачу оптимізації за змінною x

$$
\left[d\frac{\partial}{\partial z}V+(1-w)\frac{\partial}{\partial k_{OC}}V\right]x\to\inf_{0\le x\le L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)}f(\phi)},
$$

розв’язком якої є магістральне керування за валовою продукцією x при $\varphi(t)\equiv k(t-\tau)$

$$
x_{маг}(t-\tau)=\begin{cases}
0,\ \text{якщо } d\dfrac{\partial}{\partial z}V+(1-w)\dfrac{\partial V}{\partial k_{OC}}>0,\\
L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)}f\left(k(t-\tau)\right),\ \text{якщо } d\dfrac{\partial}{\partial z}V+(1-w)\dfrac{\partial V}{\partial k_{OC}}<0,\\
\text{довільне значення з}\\
\left[0;L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)}f\left(k(t-\tau)\right)\right],\ \text{якщо } d\dfrac{\partial}{\partial z}V+(1-w)\dfrac{\partial V}{\partial k_{OC}}=0.
\end{cases}
$$

Випадок $x_{маг}(t-\tau)\equiv 0$ не має практичного інтересу, а тому будемо лише розглядати випадок при $d\,{\partial V}/{\partial z}+(1-w)\dfrac{\partial V}{\partial k_{OC}}<0$

$$
x_{маг}(t-\tau)=L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)}f\left(k(t-\tau)\right) \tag{20}
$$

Підставимо (20) у (19). Після чого виділимо функцію $H(s,s_{MB})$ з виразами при керуваннях s та s_{MB}:

$$H\left(s,s_{MB}\right)=-\Big[e^{-\delta\left(t-t_0\right)}U\Big(\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v}se^{v\eta\left(t-t_0-\tau\right)}f\left(\varphi\right)\Big)+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}\times$$
$$\times e^{\left(v-1\right)\eta\left(t-t_0-\tau\right)}f\left(\varphi\right)\frac{\partial V}{\partial k_{OC}}s\Big]+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}e^{\left(v-1\right)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(\varphi\right)\left[\frac{\partial V}{\partial k}-\frac{\partial V}{\partial k_{OC}}\right]s_{MB}. \quad (21)$$

Рівняння Беллмана (19) і функція (21) мають одні й ті ж екстремуми (оптимуми) за змінними s та s_{MB} у трикутнику $\Delta=\left\{\left(s,s_{MB}\right)\in IR^2 \mid 0\le s_{MB}\le 1-s\le 1\right\}$. Тому досить знайти екстремуми функції H у Δ. Можливі такі випадки:

1) $s_{MB}=0$, а s є коренем рівняння

$$L_0e^{\left(\eta-\delta\right)\left(t-t_0\right)}U'\Big(\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v}e^{v\eta\left(t-t_0-\tau\right)}sf\left(\varphi\right)\Big)=-\frac{\partial V}{\partial k_{OC}} \quad (22)$$

при $\partial V/\partial k-\partial V/\partial k_{OC}>0$. У цьому випадку інвестиції не виділяються на матеріальне виробництво, а проходить розподіл благ між очисними роботами та споживання;

2) $s_{MB}+s=1$ при $\partial V/\partial k-\partial V/\partial k_{OC}<0$. Інвестиції не виділяються на очисні роботи, а проходить розподіл благ між матеріальним виробництвом і споживанням;

3) s_{MB} – довільне, а s є коренем рівняння (22), але такі, що $0\le s_{MB}\le 1-s\le 1$. При цьому $\partial V/\partial k-\partial V/\partial k_{OC}=0$. Проходить більш-менш рівномірний розподіл благ між матеріальним виробництвом, очисними роботами та споживанням.

Розглянемо ці випадки.

Випадок 1. Розглянемо три рівняння руху капіталів і забруднення, а також рівняння $s_{MB}=0$, тобто маємо чотири рівняння і п’ять невідомих s, s_{MB}, k, k_{OC}, z. Ступінь вільності дорівнює $\left(5-4=1\right)$ одиниці, який заповнюватимемо однією з оптимізаційних величин. Отримаємо оптимізаційні величини.

Для цього невідому функцію V будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned}V\left(t,k,k_{OC},z,\phi\right)=L_0e^{\left(\eta-\delta\right)\left(t-t_0\right)}\left(l_1k+l_2k_{OC}+l_3z\right)-\\-L_0e^{\left(\eta-\delta\right)\left(T-t_0\right)}\left(l_1k_T+l_2k_{OC}^{(T)}+l_3z_T\right).\end{aligned} \quad (23)$$

Підставимо (23) у (19) та (22). Оскільки $U'\left(C\right)>0$, то, щоб (22) мало розв’язок, потрібне виконання нерівності $l_2<0$. Обмеження на сталі l_1 і l_2 визначимо з нерівностей

$$\partial V/\partial k-\partial V/\partial k_{OC}<0,\ d\,\partial V/\partial z+\left(1-w\right)\partial V/\partial k_{OC}<0,$$

які набувають вигляду

$$\begin{cases} l_1 - l_2 < 0, \\ dl_3 + (1-w)l_2 < 0, \Rightarrow \\ l_2 < 0 \end{cases} \begin{cases} l_1 < l_2 < 0, \\ l_3 < -d^{-1}(1-w)l_2. \end{cases} \quad (24)$$

У рівнянні Беллмана (19) коефіцієнт при змінній k_{OC} прирівняємо до нуля. Звідки, знайдемо сталу l_3

$$-l_2(\mu_{OC}+\delta) - rl_3 = 0,\ \ l_3 = -r^{-1}(\mu_{OC}+\delta)l_2. \quad (25)$$

Із (24) і (25) маємо нерівність

$$1 - w > dr^{-1}(\mu_{OC}+\delta). \quad (26)$$

Але на рівні оптимізації змінні s, k, z є незалежними. Тому із рівнянь Беллмана (19) і (22) маємо систему рівнянь для визначення оптимізаційних величин s, k, z при $\phi(t) \equiv k(t-\tau)$

$$\begin{cases} (\gamma+\delta)r^{-1}(\mu_{OC}+\delta)l_2 z - L_0^{-1}e^{-\eta(t-t_0)}Q\left(L_0 e^{\eta(t-t_0)}z\right) = 0, \\ -l_1(\mu_{MB}+\delta)k(t) + \left[(1-w)(1-s(t-\tau)) - dr^{-1}(\mu_{OC}+\delta)\right]l_2(1-a)\times \\ \times L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau} f(k(t-\tau)) - L_0^{-1}e^{-\eta(t-t_0)}\times \\ \times U\left((1-a)(1-w)s(t-\tau)L_0^{\nu}e^{\nu\eta(t-t_0-\tau)}f(k(t-\tau))\right) = 0, \\ U'\left((1-a)(1-w)L_0^{\nu}e^{\nu\eta(t-t_0-\tau)}s(t-\tau)f(k(t-\tau))\right) = -l_2,\ \ t\in[t_0,T]. \end{cases} \quad (27)$$

Оскільки $l_1 < 0$, $l_2 < 0$, $Q(Z \ge 0) \le 0$ – монотонно спадна та неперервно-диференційовна, $f(k \ge 0) \ge 0$ – монотонно зростаюча та неперервно-диференційовна, $U(C \ge 0) \ge 0$ – монотонно зростаюча, двічі неперервно-диференційовна і $U''(C > 0) < 0$, то система (27) має розв'язок $\tilde{s}(t-\tau)$, $\tilde{k}(t)$, $\tilde{z}(t)$, $t \in [t_0,T]$, який визначається сумісним застосуванням методу кроків [6] і одного із чисельних методів [7] розв'язування нелінійних рівнянь, а вибором сталих l_1 і l_2 можна добитися того, щоб $\tilde{s} \in [0,1]$. Отже, отримали оптимізаційні величини $\tilde{s}$, $\tilde{k}$, $\tilde{z}$. Їх є три, а тому випадків є, відповідно, теж три. Розглянемо їх.

Випадок 1-1. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційною величиною $\tilde{s}$. Тоді магістральне керування $s_{маг}(t-\tau) = \tilde{s}(t-\tau)$, $t \in [t_0,T]$. Відповідні стохастичні магістралі $k_{маг}(t)$, $k_{OC}^{(маг)}(t)$, $z_{маг}(t)$ та, використавши рівності

$$M\dot{\xi}_j(t) = \left(M\xi_j(t)\right)^{\bullet} = 0,\ \ j = 1,2,3,\ \ t\in[t_0,T], \quad (28)$$

середні магістралі $k_{маг}^{(c)}(t)$, $k_{OC}^{(c,маг)}(t)$, $z_{маг}^{(c)}(t)$, $t\in[t_0,T]$ визначаються з системи (14), (16) при $s=s_{MB}^{(маг)}$, $s=s_{маг}$ та $x=x_{маг}$. Система (14), (16) має єдиний розв'язок у сенсі стохастичної еквівалентності [8], оскільки $f(k\ge 0)$ – неперервно-диференційовна, функції $n_j(t)$, $j=1,2,3$ – кусково-неперервні на $[t_0,T]$, а φ_0 – кусково-неперервна на $[t_0-\tau,t_0]$. Цей розв'язок можна знайти сумісним використанням методу кроків [6] і одного із чисельних методів [9, 10].

Випадок 1-2. Ступінь вільності не можна заповнювати оптимізаційною величиною $\tilde{k}$, оскільки із рівняння руху капіталу за k системи (14), (16) визначається стохастична магістраль $k_{маг}(t)$, $t\in[t_0,T]$, а використавши рівності (28), середня магістраль має вигляд

$$k_{маг}^{(c)}(t)=\left(M\varphi_0(t_0)\right)e^{-(\mu_{MB}+\eta)(t-t_0)},\ \ t\in[t_0,T], \qquad (29)$$

де M – математичне сподівання.

Випадок 1-3. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційною величиною $\tilde{z}$. Із системи (14) при $k=k_{маг}$, $k=k_{маг}^{(c)}$, $s_{MB}=0$, $z=\tilde{z}$, $x=x_{маг}$ та виконанні рівностей (28) визначаємо стохастичне середнє магістральне керування $s_{маг}(t-\tau)$ і $s_{маг}^{(c)}(t-\tau)$, $t\in[t_0,T]$. Причому, вибором l_1 та l_2 можна добитися того, щоб $s_{маг}$ і $s_{маг}^{(c)}$ належали відрізку $[0;1]$. Тоді стохастичні $k_{маг}$, $k_{OC}^{(маг)}$, $z_{маг}$ та середні магістралі $k_{маг}^{(c)}$, $k_{OC}^{(c,маг)}$, $z_{маг}^{(c)}$ визначаються із системи (14), (16) при $s=s_{маг}$, $s=s_{маг}^{(c)}$ та $x=x_{маг}$.

Таким чином, у випадку 1 маємо пару стохастичних і середніх магістральних керувань та відповідну пару трійок стохастичних і середніх магістралей.

Випадок 2. Розглянемо три рівняння руху капіталів і забруднення та рівняння $s_{MB}=1-s$, тобто чотири рівняння, а невідомих п'ять. Ступінь вільності дорівнює одиниці, який заповнюватимемо оптимізаційними величинами. Одержимо ці оптимізаційні величини.

Для цього невідому функцію V шукатимемо у вигляді

$$V(t,k,k_{OC},z)=L_0e^{(\eta-\delta)(t-t_0)}\left(l_1k+l_2k_{OC}+l_3z\right)-L_0e^{(\eta-\delta)(T-t_0)}\left(l_1k_T+l_2k_{OC}^{(T)}+l_3z_T\right). \qquad (30)$$

Обмеження на сталі l_1, l_2 і l_3 визначимо із нерівностей $\partial V/\partial k-\partial V/\partial k_{OC}<0$, $d\,\partial V/\partial z+(1-w)\,\partial V/\partial k_{OC}<0$, $\partial V/\partial k_{OC}<0$. Одержимо

$$\begin{cases} dl_3 + (1-w)l_2 < 0, \\ l_1 - l_2 < 0, \\ l_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 < l_2 < 0, \\ l_3 < -d^{-1}(1-w_2)l_2 > 0. \end{cases} \tag{31}$$

Підставимо (30) у рівняння Беллмана (19) та (22). Прирівнявши у рівнянні Беллмана коефіцієнт при змінній k_{OC} до нуля

$$-l_2(\mu_{OC} + \delta) - rl_3 = 0,$$

одержимо

$$l_3 = -r^{-1}l_2(\mu_{OC} + \delta). \tag{32}$$

Але змінні s, k і z на рівні оптимізації є незалежними змінними, а тому з рівняння Беллмана та (22) отримаємо систему рівнянь для визначення оптимізаційних величин s, k, z:

$$\begin{cases} U'\Big((1-a)(1-w)L_0^{v}e^{v\eta(t-t_0-\tau)}f\big(k(t-\tau)\big)s(t-\tau)\Big) = -l_2, \\ -l_1(\mu_{MB} + \delta)k(t) + \Big[l_1(1-w)\big(1-s(t-\tau)\big) - r^{-1}l_2(\mu_{OC} + \delta)d\Big]L_0^{v-1} \times \\ \times(1-a)e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}f\big(k(t-\tau)\big) - L_0^{-1}e^{-\eta(t-t_0)} \times \\ \times U\Big((1-a)(1-w)L_0^{v}e^{v\eta(t-t_0-\tau)}s(t-\tau)f\big(k(t-\tau)\big)\Big) = 0, \\ (\gamma+\eta)r^{-1}l_2(\mu_{OC} + \delta)z + L_0^{-1}e^{-\eta(t-t_0)}Q\Big(L_0e^{-\eta(t-t_0)}z\Big) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases} \tag{33}$$

Система (33) має розв'язок $\tilde{s}$, $\tilde{k}$, $\tilde{z}$, оскільки $l_2 < 0$, $l_1 < 0$, $U'(C > 0) > 0$ – неперервно-диференційовна, $U(C \geq 0) \geq 0$, $\lim\limits_{C \to 0} U'(C) = \infty$, $\lim\limits_{C \to \infty} U'(C) = 0$, $f(k \geq 0) \geq 0$ – неперервно-диференційовна та монотонно зростаюча, $Q(z \geq 0) \leq 0$ – монотонно спадна і неперервно-диференційовна. Оптимізаційні величини $\tilde{s}$, $\tilde{k}$, $\tilde{z}$ можна знайти із системи (33) сумісним використанням методу кроків [6] та одного із чисельних методів розв'язування нелінійних рівнянь [7]. Причому, вибором сталих l_1 і l_2 можна добитися того, щоб $\tilde{s} \in [0;1]$.

Оскільки визначено три оптимізаційні величини $\tilde{s}$, $\tilde{k}$, $\tilde{z}$, то можливі три випадки. Розглянемо їх.

Випадок 2-1. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційною величиною $\tilde{s}$. Тоді $s_{маг}(t-\tau) = \tilde{s}(t-\tau)$, а відповідно $s_{MB}^{(маг)}(t-\tau) = 1 - s_{маг}(t-\tau)$, $t \in [t_0, T]$.

Відповідні стохастичні магістралі $k_{маг}(t)$, $k_{OC}^{(маг)}(t)$ і $z_{маг}(t)$, а також, використавши рівності (28), середні магістралі визначаються із системи (14), (16) при $s = s_{маг}$, $s_{MB} = s_{MB}^{(маг)}$ і $x = x_{маг}$ сумісним використанням методу кроків [6] та одного із чисельних методів [7; 9].

Випадок 2-2. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційною величиною $\tilde{k}$. Тоді із рівняння руху капіталу за k системи (14) визначимо стохастичне магістральне керування $s_{маг}$ за величиною $\tilde{k}$:

$$s_{маг}\left(t-\tau\right)=1+\left[-\dot{\tilde{k}}\left(t\right)-\left(\mu_{MB}+\eta\right)\tilde{k}\left(t\right)-n_1\left(t\right)\dot{\xi}_1\left(t\right)\right]\left(1-a\right)^{-1}\times \\ \times\left(1-w\right)^{-1}L_0^{1-\nu}e^{(1-\nu)\eta\left(t-t_0-\tau\right)+\eta\tau}f^{-1}\left(\tilde{k}\left(t-\tau\right)\right),\ t\in\left[t_0,T\right] \tag{34}$$

і, відповідно, $s_{MB}^{(маг)}\left(t-\tau\right)=1-s_{маг}\left(t-\tau\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ та, скориставшись рівностями (28), середнє магістральне керування $s_{маг}^{(c)}$:

$$s_{маг}^{(c)}\left(t-\tau\right)=1-\left[\dot{\tilde{k}}\left(t\right)+\left(\mu_{MB}+\eta\right)\tilde{k}\left(t\right)\right]\left(1-a\right)^{-1}\times \\ \times\left(1-w\right)^{-1}L_0^{1-\nu}e^{(1-\nu)\eta\left(t-t_0-\tau\right)+\eta\tau}f^{-1}\left(\tilde{k}\left(t-\tau\right)\right),\ t\in\left[t_0,T\right]. \tag{35}$$

Відповідно, $s_{MB}^{(c,маг)}\left(t-\tau\right)=1-s_{маг}^{(c)}\left(t-\tau\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$.

Вибором сталих l_1 і l_2 можна добитися того, щоб $s_{маг}$ і $s_{маг}^{(c)}$ належали відрізку $\left[0;1\right]$.

Відповідні стохастичні магістралі $k_{маг}\left(t\right)$, $k_{OC}^{(маг)}\left(t\right)$ і $z_{маг}\left(t\right)$ та, з урахуванням рівностей (28), середні магістралі $k_{маг}^{(c)}\left(t\right)$, $k_{OC}^{(c,маг)}\left(t\right)$, $z_{маг}^{(c)}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ визначаються із системи (14), (16) при $s = s_{маг}$, $s = s_{маг}^{(c)}$, $s_{MB} = s_{MB}^{(маг)}$, $s_{MB} = s_{MB}^{(c,маг)}$ та $x = x_{маг}$.

Випадок 2-3. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційною величиною $\tilde{z}$. Тоді рівняння руху капіталу за k_{OC} і забрудненням системи (14) визначаємо стохастичну допоміжну траєкторію $k^*\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ та, з використанням рівностей (28), середню допоміжну траєкторію $k_c^*\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$. За цими допоміжними траєкторіями із рівняння руху капіталу за k знаходимо стохастичне магістральне керування $s_{маг}\left(t-\tau\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ та, з використанням рівності (28), середнє магістральне керування $s_{маг}^{(c)}\left(t-\tau\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$.

Причому, вибором сталих l_1 і l_2 можна добитися того, щоб $s_{маг}$ і $s_{маг}^{(c)}$ належали відрізку $\left[0;1\right]$. Відповідно $s_{MB}^{(маг)}\left(t-\tau\right)=1-s_{маг}\left(t-\tau\right)$ та $s_{MB}^{(c,маг)}\left(t-\tau\right)=1-s_{маг}^{(c)}\left(t-\tau\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$. А відповідні стохастичні $k_{маг}\left(t\right)$, $k_{OC}^{(маг)}\left(t\right)$, $z_{маг}\left(t\right)$ та середні магістралі $k_{маг}^{(c)}\left(t\right)$, $k_{OC}^{(c,маг)}\left(t\right)$, $z_{маг}^{(c)}\left(t\right)$ визначаються із системи (14), (16) при $s=s_{маг}$, $s=s_{маг}^{(c)}$, $s_{MB}=s_{MB}^{(маг)}$, $s_{MB}=s_{MB}^{(c,маг)}$, $x=x_{маг}$ та виконанні рівностей (28).

Таким чином, у випадку 2 маємо три пари стохастичних і середніх магістральних керувань та відповідних три трійки стохастичних і середніх магістралей.

Випадок 3. Візьмемо три рівняння руху капіталів і забруднення та п'ять невідомих. Ступінь вільності дорівнює $\left(5-3=2\right)$ два, який заповнюватимемо двома оптимізаційними величинами. Визначимо їх.

Невідому функцію V шукатимемо у вигляді

$$\begin{gathered}V\left(t,k,k_{OC},z\right)=L_0e^{(\eta-\delta)(t-t_0)}\left(l_1k+l_2k_{OC}+l_3z\right)-\\-L_0e^{(\eta-\delta)(T-t_0)}\left(l_1k_T+l_2k_{OC}^{(T)}+l_3z_T\right),\quad t\in\left[t_0,T\right].\end{gathered}\tag{36}$$

Обмеження на сталі l_1, l_2, l_3 визначимо із умов

$$d\,{\partial V}\big/{\partial z}+\left(1-w\right){\partial V}\big/{\partial k_{OC}}<0,\quad {\partial V}\big/{\partial k}-{\partial V}\big/{\partial k_{OC}}=0,\quad {\partial V}\big/{\partial k_{OC}}<0\,.$$

Отримаємо

$$\begin{cases}dl_3+\left(1-w\right)l_2<0,\\ l_1-l_2=0,\\ l_2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l_3<-d^{-1}\left(1-w\right)l_2,\\ l_1=l_2<0.\end{cases}\tag{37}$$

Підставимо (36), враховуючи (37), у рівняння Беллмана (19) і (22). Потім коефіцієнт при змінній k_{OC} прирівняємо до нуля

$$rl_3+l_1\left(\mu_{OC}+\delta\right)=0$$

і знайдемо

$$l_3=-r^{-1}\left(\mu_{OC}+\delta\right)l_1\,.\tag{38}$$

Для визначення оптимізаційних величин s, k, z із рівняння Беллмана (19) і (22), враховуючи, що змінні s, k, z на етапі оптимізації є незалежними, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases}U'\left(\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v}e^{v\eta\left(t-t_0-\tau\right)}s\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right)\right)=-l_1,\\ -\left(\gamma+\eta\right)r^{-1}\left(\mu_{OC}+\delta\right)l_1z+L_0^{-1}e^{-\eta\left(t-t_0\right)}Q\left(L_0e^{\eta\left(t-t_0\right)}z\right)=0,\\ -l_1\left(\mu_{MB}+\delta\right)k\left(t\right)+\left[\left(1-w\right)\left(1-s\left(t-\tau\right)\right)-dr^{-1}\left(\mu_{OC}+\delta\right)\right]l_1\left(1-a\right)L_0^{v-1}\times\\ \times e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k\left(t-\tau\right)\right)-L_0^{-1}e^{-\eta\left(t-t_0\right)}\times\\ \times U\left(\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v}e^{v\eta\left(t-t_0-\tau\right)}s\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right)\right)=0,\quad t\in\left[t_0,T\right].\end{cases}\tag{39}$$

Система рівнянь (39) має розв'язок $\tilde{s}$, $\tilde{k}$, $\tilde{z}$, оскільки $U'\left(C>0\right)>0$ – неперервно-диференційовна, $U\left(C\ge 0\right)\ge 0$, $l_1<0$, $Q\left(z\ge 0\right)\le 0$ – неперервно-диференційовна і монотонно спадна, $f\left(k\ge 0\right)\ge 0$ – неперервно-диференційовна, який можна визначити сумісним застосуванням методу кроків [6] та одного із чисельних методів розв'язування нелінійних рівнянь [7]. Причому, вибором сталої l_1 можна добитися того, щоб $\tilde{s}$ належала відрізку $\left[0;1\right]$. Оптимізаційних величин є три, а ступінь вільності дорівнює два, тому кількість випадків дорівнює кількості комбінацій із 3 по 2, тобто три випадки. Розглянемо їх.

Випадок 3-1. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційними величинами $\tilde{s}$ та $\tilde{k}$. Тоді магістральне керування $s_{маг}\left(t-\tau\right)=\tilde{s}\left(t-\tau\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$. Із рівняння руху капіталу по k за величиною $\tilde{k}$ знаходимо стохастичне магістральне керування

$$
\begin{gathered}
s_{MB}^{(маг)}\left(t-\tau\right)=\left[\dot{\tilde{k}}\left(t\right)+\left(\mu_{MB}+\eta\right)\tilde{k}\left(t\right)-n_1\left(t\right)\dot{\xi}_1\left(t\right)\right]\left(1-a\right)^{-1}\times \\
\times\left(1-w\right)^{-1}L_0^{1-v}e^{(1-v)\eta\left(t-t_0-\tau\right)+\eta\tau}f^{-1}\left(\tilde{k}\left(t-\tau\right)\right),\ t\in\left[t_0,T\right]
\end{gathered}
\qquad (40)
$$

та з використанням рівності (28) середнє магістральне керування

$$
\begin{gathered}
s_{MB}^{(c,маг)}\left(t-\tau\right)=\left[\dot{\tilde{k}}\left(t\right)+\left(\mu_{MB}+\eta\right)\tilde{k}\left(t\right)\right]\left(1-a\right)^{-1}\times \\
\times\left(1-w\right)^{-1}L_0^{1-v}e^{(1-v)\eta\left(t-t_0-\tau\right)+\eta\tau}f^{-1}\left(\tilde{k}\left(t-\tau\right)\right),\ t\in\left[t_0,T\right].
\end{gathered}
\qquad (41)
$$

Вибором сталої l_1 можна добитися того, щоб $s_{MB}^{(маг)}$ і $s_{MB}^{(c,маг)}$ належали відрізку $\left[0;1-s_{маг}\right]$.

Відповідні стохастичні магістралі $k_{маг}\left(t\right)$, $k_{OC}^{(маг)}\left(t\right)$, $z_{маг}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ та, з використанням рівностей (28), середні магістралі $k_{маг}^{(c)}\left(t\right)$, $k_{OC}^{(c,маг)}\left(t\right)$, $z_{маг}^{(c)}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ визначаються із системи (14), (16) при $s_{MB}=s_{MB}^{(маг)}$, $s=s_{маг}$ та $x=x_{маг}$.

Випадок 3-2. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційними величинами $\tilde{s}$ та $\tilde{z}$. Тоді магістральне керування $s_{маг}\left(t-\tau\right)=\tilde{s}\left(t-\tau\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$. А магістральне керування $s_{MB}^{(маг)}$ знаходиться із такої задачі динамічного програмування із запізненням:

$$\begin{cases} \int\limits_{t_0}^{T} y(t)\,dt \to \max\limits_{s_{MB}}, \\ \dot{k}(t) = -(\mu_{MB}+\eta)k(t) + (1-a)(1-w)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau} \times \\ \qquad \times f\left(k(t-\tau)\right)s_{MB}(t-\tau), \\ \dot{k}_{OC}(t) = -(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}(t) + (1-a)(1-w)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau} \times \\ \qquad \times f\left(k(t-\tau)\right)\left(1 - s_{маг}(t-\tau) - s_{MB}(t-\tau)\right), \\ d(1-a)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau} f\left(k(t-\tau)\right) - rk_{OC}(t) = \dot{\tilde{z}}(t) + (\gamma+\eta)\tilde{z}(t), \\ t\in[t_0,T],\ \ 0 \le s_{MB},\ \ s_{MB}(t-\tau) + y = 1 - s_{маг}(t-\tau),\ \ y \ge 0, \\ k(\Theta) = M\phi_0(\Theta),\ \ \Theta\in[t_0-\tau, t_0],\ \ k_{OC}(t_0) = Mk_{OC}^{(0)},\ \ z(t_0) = Mz_0, \end{cases} \tag{42}$$

де M – математичне сподівання. Ця задача одержана із системи (14)-(16) при $x = x_{маг}$, $s = s_{маг}$ та використанні рівностей (28).

Задача динамічного програмування із запізненням (42) методом кроків зводиться до задачі динамічного програмування. Причому, вибором сталої l_1 можна добитися виконання нерівностей $s_{маг}(t-\tau) \ge 0$, $s_{MB}^{(маг)}(t-\tau) \ge 0$, $s_{MB}^{(маг)}(t-\tau) \le 1 - s_{маг}(t-\tau) \le 1$.

Відповідні стохастичні магістралі $k_{маг}(t)$, $k_{OC}^{(маг)}(t)$, $z_{маг}(t)$, $t\in[t_0,T]$ та середні магістралі, з використанням рівностей (28), визначаються із системи (14), (16) при $s = s_{маг}$, $s_{MB} = s_{MB}^{(маг)}$ та $x = x_{маг}$.

Випадок 3-3. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційними величинами $\tilde{k}$ і $\tilde{z}$. Із рівняння руху капіталу по k за величиною $\tilde{k}$ визначаємо стохастичне магістральне керування:

$$s_{MB}^{(маг)}(t-\tau) = \left[\dot{\tilde{k}}(t) + (\mu_{MB}+\eta)\tilde{k}(t) - n_1(t)\xi_1(t)\right](1-a)^{-1}(1-w)^{-1} \times$$
$$\times L_0^{1-\nu}e^{(1-\nu)\eta(t-t_0-\tau)+\eta\tau} f^{-1}\left(\tilde{k}(t-\tau)\right),\ \ t\in[t_0,T],$$

та, з використанням рівностей (28), середнє магістральне керування:

$$s_{MB}^{(c,маг)}(t-\tau) = \left[\dot{\tilde{k}}(t) + (\mu_{MB}+\eta)\tilde{k}(t)\right](1-a)^{-1}(1-w)^{-1} \times$$
$$\times L_0^{1-\nu}e^{(1-\nu)\eta(t-t_0-\tau)+\eta\tau} f^{-1}\left(\tilde{k}(t-\tau)\right),\ \ t\in[t_0,T].$$

Вибором сталої l_1 можна добитися того, щоб $s_{MB}^{(маг)}$ і $s_{MB}^{(c,маг)}$ належали відрізку $[0;1]$.

За величинами $\tilde{k}$ і $\tilde{z}$ із рівняння руху забруднення системи (14) знаходимо стохастичну k_{OC}^{*} та середню допоміжні траєкторії $k_{OC}^{(*,c)}$, за якими із рівняння руху капіталу за k_{OC} визначаємо стохастичне та середнє магістральне керування:

$$s_{маг}(t-\tau)=1-s_{MB}^{(маг)}(t-\tau)+\left[-\dot{k}_{OC}^{*}(t)+(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}^{*}(t)+n_2(t)\dot{\xi}_2(t)\right]\times$$
$$\times(1-a)^{-1}(1-w)^{-1}L_0^{1-v}e^{(1-v)\eta(t-t_0-\tau)+\eta\tau}f^{-1}\left(\tilde{k}(t-\tau)\right),$$
$$s_{маг}^{(c)}(t-\tau)=1-s_{MB}^{(c,маг)}(t-\tau)-\left[\dot{k}_{OC}^{*}(t)+(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}^{*}(t)\right]\times$$
$$\times(1-a)^{-1}(1-w)^{-1}L_0^{1-v}e^{(1-v)\eta(t-t_0-\tau)+\eta\tau}f^{-1}\left(\tilde{k}(t-\tau)\right),\ t\in[t_0,T].$$

Вибором сталої l_1 можна добитися виконання нерівностей $s_{маг}$, $s_{маг}^{(c)}$, $s_{MB}^{(маг)}$, $s_{MB}^{(c,маг)}\geq 0$, $s_{MB}^{(маг)}\leq 1-s_{маг}$, $s_{MB}^{(c,маг)}\leq 1-s_{маг}^{(c)}$.

Таким чином, у випадку 3 отримали три пари стохастичних і середніх магістральних керувань та відповідних три трійки стохастичних і середніх магістралей.

Отже, система (14)-(18) має вісім трійок стохастичних і середніх магістральних керувань $s_{MB}^{(маг)}$, $s_{маг}$, $x_{маг}$ та відповідних вісім трійок стохастичних і середніх магістралей $k_{маг}$, $k_{OC}^{(маг)}$, $z_{маг}$, тобто система (14)-(18) має вісім еколого-економічних „режимів”. Кожен такий „режим” характеризується певною групою процесів серед процесів споживання та інвестування матеріального виробництва й очисних робіт. З іншого боку, кожний такий „режим” призначається для вибору пріоритетних процесів на магістральному або правому періодах (правий період $=T$ – магістральний період). При цьому вибір „режиму” серед восьми „режимів” повинен бути таким, щоб досягнути бажаний кінцевий стан системи (14)-(18). Якщо бажаний кінцевий стан системи (14)-(18) не можна досягнути, то це означає, що дані системи (14)-(18) треба переглянути, оскільки завищені умови на цю систему і тому їх треба послабити.

Якщо виконуються нерівності

$$Mk_{маг}(T)\geq k_T,\ \ Mk_{OC}^{(маг)}(T)\geq k_{OC}^{(T)},\ \ Mz_{маг}(T)\leq z_T, \tag{43}$$

то знайдені стохастичні та середні магістральні керування $s_{маг}$, $s_{MB}^{(маг)}$ і $x_{маг}$ та відповідні стохастичні та середні магістралі $k_{маг}$, $k_{OC}^{(маг)}$ і $z_{маг}$ є оптимальними.

При невиконанні хоча б однієї із нерівностей (43) потрібно проводити побудову правих керувань $s_{ПР}$ і $s_{MB}^{(ПР)}$, відповідних правих траєкторій $k_{ПР}$, $k_{OC}^{(ПР)}$ і $z_{ПР}$ та правого моменту перемикання керувань $\zeta_{ПР}$.

Праві керування. Розглянемо випадок

$$Mk_{маг}\left(T\right)<k_T,\ \ Mk_{OC}^{(маг)}\left(T\right)<k_{OC}^{(T)},\ \ Mz_{маг}\left(T\right)>z_T\,. \tag{44}$$

Для всіх інших випадків міркування аналогічні.

Для випадку (44) праві траєкторії $k_{ПР}$, $k_{OC}^{(ПР)}$ і $z_{ПР}$ повинні за капіталами монотонно зростати, а за забрудненням – монотонно спадати. Виконання цих властивостей монотонності правих траєкторій приводить до виконання таких стохастичних нерівностей:

$$\begin{aligned}
&-\left(\mu_{MB}+\eta\right)k\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}\times\\
&\qquad\times s_{MB}\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right)+n_1\left(t\right)\dot{\xi}_1\left(t\right)>0,\\
&-\left(\mu_{OC}+\eta\right)k_{OC}\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}\times\\
&\qquad\times\left[1-s\left(t-\tau\right)-s_{MB}\left(t-\tau\right)\right]f\left(k\left(t-\tau\right)\right)+n_2\left(t\right)\dot{\xi}_2\left(t\right)>0,\\
&-\left(\gamma+\eta\right)z\left(t\right)+d\left(1-a\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}\times\\
&\qquad\times f\left(k\left(t-\tau\right)\right)-k_{OC}\left(t\right)+n_3\left(t\right)\dot{\xi}_3\left(t\right)<0,\ \ t\in\left[t_0,T\right].
\end{aligned}\tag{45}$$

Згідно з [11], стохастичні нерівності (45) можна замінити детермінованими нерівностями:

$$\begin{aligned}
&-\left(\mu_{MB}+\eta\right)k\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}\times\\
&\qquad\times s_{MB}\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right)+n_1\left(t\right)M\dot{\xi}_1\left(t\right)>0,\\
&-\left(\mu_{OC}+\eta\right)k_{OC}\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}\times\\
&\qquad\times\left[1-s\left(t-\tau\right)-s_{MB}\left(t-\tau\right)\right]f\left(k\left(t-\tau\right)\right)+n_2\left(t\right)M\dot{\xi}_2\left(t\right)>0,\\
&-\left(\gamma+\eta\right)z\left(t\right)+d\left(1-a\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}\times\\
&\qquad\times f\left(k\left(t-\tau\right)\right)-rk_{OC}\left(t\right)+n_3\left(t\right)M\dot{\xi}_3\left(t\right)<0,\ \ t\in\left[t_0,T\right],
\end{aligned}\tag{46}$$

де M – математичне сподівання випадкових величин $\dot{\xi}_j\left(t\right)$, $j=1,2,3$, $t\in\left[t_0,T\right]$.

Але для вінерівського процесу ξ_j із нульовим математичним сподіванням $M\xi_j\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ виконується рівність (28).

Тоді нерівності (46) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
&-\left(\mu_{MB}+\eta\right)k\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}s_{MB}\left(t-\tau\right)f\left(k\left(t-\tau\right)\right)>0,\\
&-\left(\mu_{OC}+\eta\right)k_{OC}\left(t\right)+\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}\times\\
&\times\left[1-s\left(t-\tau\right)-s_{MB}\left(t-\tau\right)\right]f\left(k\left(t-\tau\right)\right)>0,\\
&-\left(\gamma+\eta\right)z\left(t\right)+d\left(1-a\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k\left(t-\tau\right)\right)-rk_{OC}\left(t\right)<0,\ \ t\in\left[t_0,T\right].
\end{aligned}\tag{47}$$

Нерівність (47) використаємо для вивчення властивостей правих керувань та відповідних правих траєкторій системи (14).

Властивості правих керувань та відповідних правих траєкторій системи (14). Властивості правих керувань та відповідних правих траєкторій детермінованої системи (14) необхідні для побудови правих керувань та відповідних траєкторій стохастичної системи (14).

Розглянемо властивості правих керувань та відповідних правих траєкторій детермінованої системи (14), тобто системи при $n_1(t)=n_2(t)=n_3(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,T]$.

I. При малих запізненнях τ може існувати $\tilde{k}_t$ таке, що для $k(t)$, $k(t-\tau)\in(0,\tilde{k}_t)$ виконується нерівність при $s_{ПР}\in(0;1]$ та угнутості $f(k>0)$

$$-(\mu_{MB}+\eta)k(t)+(1-a)(1-w)s_{MB}L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}f(k(t-\tau))>0,$$

яка гарантує монотонне зростання крайової траєкторії $k_{ПР}(t)$, $t\in[t_0,T]$. Якщо не існує такого $\tilde{k}_t$, $t\in[t_0,T]$, то для нерівності

$$s_{MB}(t-\tau)>\frac{(\mu_{MB}+\eta)k(t)}{(1-a)(1-w)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}f(k(t-\tau))}$$

треба провести оцінку правої частини. Маємо:

$$s_{MB}^{(ПР)}=\frac{(\mu_{MB}+\eta)k_{ПР}^{(\sup)}}{(1-a)(1-w)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t_{\inf}-t_0-\tau)-\eta\tau}f\left(k_{ПР}^{(\inf)}\right)},\quad t_{\inf}=\begin{cases}T,\ якщо\ \nu<1,\\ t_0,\ якщо\ \nu\ge 1,\end{cases}$$

$$k_{ПР}^{(\inf)}=\inf\left\{\inf_{[t_0-\tau,t_0]}\tilde{\varphi}_0(\Theta),\quad \inf_{[t_0,T]}k_{маг}(t),\quad k_T\right\},\tag{48}$$

$$k_{ПР}^{(\sup)}=\sup\left\{\sup_{[t_0-\tau,t_0]}\tilde{\varphi}_0(\Theta),\quad \sup_{[t_0,T]}k_{маг}(t),\quad k_T\right\}.$$

Отже, проміжком монотонного зростання правої траєкторії при $s_{MB}^{(ПР)}\in[0;1]$ за правим керуванням є $\left[s_{MB}^{(ПР)};1\right]$. У випадку $s_{MB}^{(ПР)}\notin[0;1]$ для визначення $s_{MB}^{(ПР)}$ треба розв'язати задачу нелінійного програмування.

II. Для визначення проміжку монотонного зростання k_{OC} за керуванням $s_{ПР}^{(0)}$ проведемо оцінку правої частини нерівності:

$$1-s-s_{MB}^{(ПР)}>\frac{(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}(t)}{(1-a)(1-w)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}f(k(t-\tau))}.$$

Маємо

$$\frac{\left(\mu_{OC}+\eta\right)k_{OC}\left(t\right)}{\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{\nu-1}e^{\left(\nu-1\right)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k\left(t-\tau\right)\right)}<\frac{\left(\mu_{OC}+\eta\right)k_{OC}^{(\sup)}}{\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{\nu-1}e^{\left(\nu-1\right)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k_{ПР}^{\min}\right)}.$$

$$k_{OC}^{(\sup)}=\sup\left\{k_{OC}^{(0)},\sup_{\left[t_0,T\right]}k_{OC}^{(маг)}\left(t\right),k_{OC}^{(T)}\right\}.$$

Звідси,

$$s_{ПР}=1-s_{MB}^{(ПР)}-\frac{\left(\mu_{OC}+\eta\right)k_{OC}^{(\sup)}}{\left(1-a\right)\left(1-w\right)L_0^{\nu-1}e^{\left(\nu-1\right)\eta\left(t_{\min}-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k_{кр}^{(\min)}\right)} \tag{49}$$

Якщо $0\le s_{MB}^{(ПР)}\le 1-s_{ПР}\le 1$, то на проміжку $\left[0;s_{ПР}\right]$ права траєкторія $k_{OC}^{(ПР)}\left(t\right)$ монотонно зростає. У випадку невиконання нерівностей $0\le s_{MB}^{(ПР)}\le 1-s_{ПР}\le 1$ треба для визначення $s_{ПР}$ розв'язати задачу нелінійного програмування.

III. Для монотонного спадання $z_{ПР}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ необхідне виконання нерівності

$$d<\frac{rk_{OC}\left(t\right)+\left(\gamma+\eta\right)z\left(t\right)}{\left(1-a\right)L_0^{\nu-1}e^{\left(\nu-1\right)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k\left(t-\tau\right)\right)}.$$

Проведемо оцінку правої частини цієї нерівності:

$$\frac{rk_{OC}\left(t\right)+\left(\gamma+\eta\right)z\left(t\right)}{\left(1-a\right)L_0^{\nu-1}e^{\left(\nu-1\right)\eta\left(t-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k\left(t-\tau\right)\right)}>\frac{rk_{OC}^{(\inf)}+\left(\gamma+\eta\right)z_T^{(\inf)}}{\left(1-a\right)L_0^{\nu-1}e^{\left(\nu-1\right)\eta\left(t_{\sup}-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k_{ПР}^{(\sup)}\right)}.$$

Звідси,

$$d_{ПР}=\frac{rk_{OC}^{(\inf)}+\left(\gamma+\eta\right)z_{ПР}^{(\inf)}}{\left(1-a\right)L_0^{\nu-1}e^{\left(\nu-1\right)\eta\left(t_{\sup}-t_0-\tau\right)-\eta\tau}f\left(k_{ПР}^{(\sup)}\right)},$$

$$z_{ПР}^{(\inf)}=\inf\left\{z_0,\quad \inf_{\left[t_0,T\right]}z_{маг}\left(t\right),\quad z_T\right\}, \tag{50}$$

$$k_{OC}^{(\inf)}=\inf\left\{k_{OC}^{(0)},\quad \inf_{\left[t_0,T\right]}k_{OC}^{(маг)}\left(t\right),\quad k_{OC}^{(T)}\right\}.$$

Отже, для $d\in\left(0,d_{ПР}\right]$ права траєкторія $z_{ПР}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ монотонно спадає. Якщо $d>d_{ПР}$, то треба розв'язувати задачу нелінійного програмування, яка буде описана нижче.

Якщо із оціночних властивостей (48)-(50) не можна вибрати праві керування ($s_{MB}^{(ПР)}\notin\left[0;1\right]$, не виконуються нерівності $0\le s_{MB}^{(ПР)}\le 1-s_{ПР}\le 1$, $d>d_{ПР}$), то праві керування $s_{MB}^{(ПР)}$ і $s_{ПР}$ треба визначити із задачі нелінійного програмування.

Формалізуємо цю задачу. Для цього використаємо нерівність (47) та обмеження на керування і стан системи (14) для випадку $k_{маг}(T) < k_T$, $k_{OC}(T) < k_{OC}^{(T)}$ і $z_T < z_{маг}(T)$ (для інших випадків усе проводиться аналогічно).

Задача нелінійного програмування має вигляд:

$$\begin{cases} \max(-y), \\ -(\mu_{MB}+\eta)k(t)+(1-a)(1-w)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}s_{MB}(t-\tau)f(k(t-\tau)) \geq \varepsilon_1, \\ -(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}(t)+(1-a)(1-w)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}\times \\ \qquad \times\left[1-s(t-\tau)-s_{MB}(t-\tau)\right]f(k(t-\tau)) \geq \varepsilon_2 > 0, \\ -(\gamma+\eta)z(t)+d(1-a)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}-rk_{OC}(t) \leq \varepsilon_3, \\ k_{маг}(t) \leq k(t) \leq k_T,\ \ k_{OC}^{(маг)}(t) \leq k_{OC}(t) \leq k_{OC}^{(T)},\ \ z_T \leq z(t) \leq z_{маг}(t), \\ 0 \leq s_{MB}(t-\tau) \leq 1-s(t-\tau),\ \ y-s(t-\tau)=0,\ \ y\geq 0,\ \ s(t-\tau)\geq 0,\ \ t_0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{51}$$

де $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$ – задані досить малі числа.

Задачу (51) методом кроків [6] можна звести на кожному кроці до задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} \max(-y), \\ -(\mu_{MB}+\eta)k_i(t)+(1-a)(1-w)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}s_{MB}^{(i-1)}(t-\tau)f(k_{i-1}(t-\tau)) \geq \varepsilon_1, \\ -(\mu_{OC}+\eta)k_{OC}^{(i)}(t)+(1-a)(1-w)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}\times \\ \qquad \times\left[1-s_{i-1}(t-\tau)-s_{MB}^{(i-1)}(t-\tau)\right]f(k_{i-1}(t-\tau)) \geq \varepsilon_2, \\ -(\gamma+\eta)z_i(t)+d(1-a)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau}-rk_{OC}^{(i)}(t) \leq \varepsilon_3, \\ k_{маг}(t) \leq k_i(t) \leq k_T,\ \ k_{OC}^{(маг)}(t) \leq k_{OC}^{(i)}(t) \leq k_{OC}^{(T)},\ \ z_T \leq z_i(t) \leq z_{маг}(t), \\ 0 \leq s_{MB}^{(i-1)}(t-\tau) \leq 1-s_i(t-\tau),\ \ y-s_{i-1}(t-\tau)=0,\ \ y\geq 0, \\ t\in\left[t_0+(i-1)\tau,\ t_0+i\tau\right],\ \ i=\overline{1,(m-1)}\ \ \text{та} \\ t\in\left[t_0+(m-1)\tau,\ T\right]\ \ (i=m),\ \ t_0+(m-1)\tau \leq T \leq t_0+m\tau. \end{cases} \tag{52}$$

Розв’язавши задачі лінійного програмування (52) на кожному кроці, одержимо праві керування:

$$\begin{aligned} s_{ПР}(t-\tau) &= \Big\{s_{i-1}(t-\tau),\ \ t_0+(i-1)\tau \leq t \leq t_0+i\tau,\ \ i=\overline{1,(m-1)}; \\ &\qquad \text{при}\ \ i=m\ \ t\in\left[t_0+(m-1)\tau, T\right]\Big\}, \\ s_{MB}^{(ПР)}(t-\tau) &= \Big\{s_{MB}^{(i-1)}(t-\tau),\ \ t_0+(i-1)\tau \leq t_0+i\tau,\ \ i=\overline{1,(m-1)}; \\ &\qquad \text{при}\ \ i=m\ \ t\in\left[t_0+(m-1)\tau, T\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Правий момент перемикання керувань. Правий момент перемикання керувань $\zeta_{ПР}$ визначимо із задачі оптимальної швидкодії у випадку (44) (для інших випадків усе аналогічно).

Зауважимо, що праві траєкторії за капіталами k і k_{OC} повинні монотонно зростати, а за забрудненням – монотонно спадати.

За властивостями правих керувань і правих траєкторій I-III виберемо $s_{MB}^{(ПР,В)} \in \left[s_{MB}^{(ПР)};1 \right]$, $s_{ПР}^{(В)} \in \left[0; s_{ПР}\right]$, такі, що $0 \le s_{MB}^{(ПР,В)} \le 1 - s_{ПР}^{(В)} \le 1$.

Сформуємо проміжки для керувань $s_{MB} \in \left[0; s_{MB}^{(ПР,В)}\right]$ та $s \in \left[0; s_{ПР}^{(В)}\right]$ і формалізуємо задачу оптимальної швидкодії.

Нехай $D_\varepsilon = \Big\{ \left(k, k_{OC}, z\right) : k \in \left[k_{маг}(t) - \varepsilon, k_{маг}(t) + \varepsilon \right],\quad k_{OC} \in \left[k_{OC}^{(маг)}(t) - \varepsilon,\right.$ $\left. k_{OC}^{(маг)}(t) + \varepsilon \right]$, $z \in \left[z_{маг}(t) - \varepsilon, z_{маг}(t) + \varepsilon \right]$, $t \in \left[t_0, T\right] \Big\}$ – заданий замкнений окіл магістралей ($\varepsilon > 0$ – досить мале число).

Через $\tau_{s_{MB},s}\left(k, k_{OC}, z\right)$ позначимо момент першого досягнення множини D_ε системою (14) при $x = L_0^{v-1} e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)} f\left(k\left(t-\tau\right)\right)$, яка починає рух у зворотному напрямі осі t із точки $\left(k_T, k_{OC}^{(T)}, z_T\right)$ у момент часу $t = T$. Задача оптимальної швидкодії полягає у виборі такого керування $s_{MB}^{(ПР,В)}$ і $s_{ПР}^{(В)}$, при якому середній час досягнення D_ε рухомою точкою є мінімальним:

$$M\tau_{s_{MB}^{(ПР,В)}, s_{ПР}^{(В)}}\left(k, k_{OC}, z\right) = \min_{s_{MB}, s} M\tau_{s_{MB},s}\left(k, k_{OC}, z\right), \tag{54}$$

де M – математичне сподівання випадкової величини $\tau_{s_{MB},s}$.

Для задачі оптимальної швидкодії запишемо рівняння Беллмана [5]:

$$\begin{aligned}
&\inf_{s_{MB}, s_{OC}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) + \left[-\left(\mu_{MB} + \eta\right) k + \left(1-a\right)\left(1-w\right) s_{MB} \times \right.\right. \\
&\left. \times L_0^{v-1} e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau} f\left(\varphi\right) \right] \frac{\partial}{\partial k} V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) + \\
&+ \left[\left(1-a\right)\left(1-w\right)\left(1-s-s_{MB}\right) L_0^{v-1} e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau} f\left(\varphi\right) - \left(\mu_{OC} + \eta\right) k_{OC} \right] \times \\
&\times \frac{\partial}{\partial k_{OC}} V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) + \left[d\left(1-a\right) L_0^{v-1} e^{(v-1)\eta(t-t_0-\tau)-\eta\tau} f\left(\varphi\right) - r k_{OC} - \left(\gamma + \eta\right) z \right] \times \\
&\times \frac{\partial}{\partial z} V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) + 0.5 n_1^2\left(t\right) \frac{\partial^2}{\partial k^2} V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) + \\
&\left. + 0.5 n_2^2\left(t\right) \frac{\partial^2}{\partial k_{OC}^2} V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) + 0.5 n_3^2\left(t\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) - 1 \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$s_{MB} \in \left[0, s_{MB}^{(ПР,В)}\right], \;\; s \in \left[0, s_{ПР}^{(В)}\right], \;\; 0 \le s_{MB} \le 1 - s \le 1,$$
$$V\left(\zeta_{ПР},\, k_{маг}\left(\zeta_{ПР}\right),\, k_{OC}^{(маг)}\left(\zeta_{ПР}\right),\, z_{маг}\left(\zeta_{ПР}\right),\, \varphi\left(\zeta_{ПР}\right)\right) = 0, \tag{55}$$

де $\zeta_{ПР} \in \left(t_0, T\right)$ – шуканий правий момент перемикання керувань.

Із задачі (55) маємо праві керування:

$$s_{MB}^{(ПР)}\left(t-\tau\right) = \begin{cases} 0, \text{якщо } \partial V/\partial k - \partial V/\partial k_{OC} > 0, \\ s_{MB}^{(ПР,В)}, \text{якщо } \partial V/\partial k - \partial V/\partial k_{OC} < 0, \\ \text{довільне значення з } \left[0; s_{MB}^{(ПР,В)}\right], \text{якщо } \partial V/\partial k - \partial V/\partial k_{OC} = 0, \end{cases}$$
$$s_{ПР}\left(t-\tau\right) = \begin{cases} 0, \text{якщо } \partial V/\partial k_{OC} < 0, \\ s_{ПР}^{(В)}, \text{якщо } \partial V/\partial k_{OC} > 0, \\ \text{довільне значення з } \left[0; s_{ПР}^{(В)}\right], \textit{якщо } \partial V/\partial k_{OC} = 0, \end{cases} \tag{56}$$
$$0 \le s_{BM}^{(ПР)} \le 1 - s_{ПР} \le 1.$$

Щоб праві керування набували значень

$$s_{MB}^{(ПР)}\left(t-\tau\right) = s_{MB}^{(ПР,В)}, \;\; s_{ПР}\left(t-\tau\right) = s_{ПР}^{(В)}, \;\; t \in \left[t_0, T\right], \tag{57}$$

потрібне виконання нерівностей $\partial V/\partial k - \partial V/\partial k_{OC} < 0$ і $\partial V/\partial k_{OC} > 0$. Ці нерівності дозволяють невідому функцію V шукати у вигляді

$$V\left(t, k, k_{OC}, z, \varphi\right) = -l_1\left[k - k_{маг}\left(\zeta_{ПР}\right)\right] - \left[k_{OC} - k_{OC}^{(маг)}\left(\zeta_{ПР}\right)\right] + l_2\left[z - z_{маг}\right] \tag{58}$$

Підставимо (57) і (58) у рівняння Беллмана (55). Прирівнявши коефіцієнт при змінній k_{OC} до нуля, одержимо $l_2 = r^{-1}\left(\mu_{OC} + \eta\right)$. Підставивши $t = \zeta_{ПР}$, $k = Mk_{маг}\left(\zeta_{ПР}\right)$, $k_{OC} = Mk_{OC}^{(маг)}\left(\zeta_{ПР}\right)$ та $z = Mz_{маг}\left(\zeta_{ПР}\right)$, отримаємо рівняння для визначення моменту керування $\zeta_{ПР}$:

$$l_1\left(\mu_{MB} + \eta\right)k_{маг}\left(\zeta_{ПР}\right) - r^{-1}\left(\mu_{OC} + \eta\right)\left(\gamma + \eta\right)z_{маг} + \left(1-a\right)L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(\zeta_{ПР} - t_0 - \tau\right) - \eta\tau} \times$$
$$\times f\left(k_{маг}\left(\zeta_{ПР} - \tau\right)\right)\left[-l_1\left(1-w\right)s_{MB}^{(ПР,В)} - \left(1-w\right)s_{ПР}^{(В)} + r^{-1}\left(\mu_{OC} + \eta\right)d\right] = 1, \tag{59}$$

де M – математичне сподівання.

Вибором $l_1 > 0$ можна добитися того, щоб правий момент перемикання керування $\zeta_{ПР}$ належав проміжку $\left(t_0, T\right)$.

Праві траєкторії. За знайденим $\zeta_{ПР}$ знаходимо відповідні стохастичні та середні праві траєкторії $k_{ПР}\left(t\right)$, $k_{OC}^{(ПР)}\left(t\right)$ та $z_{ПР}\left(t\right)$, $t \in \left[\zeta_{ПР}, T\right]$ із системи (14) при $x = L_0^{v-1}e^{(v-1)\eta\left(t - t_0 - \tau\right)} f\left(k\left(t-\tau\right)\right)$, $s_{MB}\left(t-\tau\right) = s_{MB}^{(ПР,В)}\left(t-\tau\right)$, $s\left(t-\tau\right) = s_{ПР}^{(В)}\left(t-\tau\right)$, початкових умовах $k(\Theta)=k_{маг}(\Theta)$, $\Theta\in[\zeta_{ПР}-\tau,\zeta_{ПР}]$, $k_{OC}(\zeta_{ПР})=k_{OC}^{(маг)}(\zeta_{ПР})$, $z(\zeta_{ПР})=z_{маг}(\zeta_{ПР})$ та рівностей (28).

Оптимальний процес. Тоді можна записати стохастичний і середній оптимальні процеси для задачі (14)-(18)

$$
\begin{gathered}
k_{ОП}(t)=\begin{Bmatrix} k_{маг}(t), \text{ якщо } t\in[t_0,\zeta_{ПР}), \\ k_{ПР}(t), \text{ якщо } t\in[\zeta_{ПР},T] \end{Bmatrix},\ k_{OC}^{(ОП)}(t)=\begin{Bmatrix} k_{OC}^{(маг)}(t), \text{ якщо } t\in[t_0,\zeta_{ПР}), \\ k_{OC}^{(ПР)}(t), \text{ якщо } t\in[\zeta_{ПР},T] \end{Bmatrix}, \\
z_{ОП}(t)=\begin{Bmatrix} z_{маг}(t), \text{ якщо } t\in[t_0,\zeta_{ПР}), \\ z_{ПР}(t), \text{ якщо } t\in[\zeta_{ПР},T] \end{Bmatrix},\ s_{MB}^{(ОП)}(t-\tau)=\begin{Bmatrix} s_{MB}^{(маг)}(t-\tau), \text{ якщо } t\in[t_0,\zeta_{ПР}), \\ s_{MB}^{(ПР)}(t-\tau), \text{ якщо } t\in[\zeta_{ПР},T] \end{Bmatrix}, \\
s_{ОП}(t-\tau)=\begin{Bmatrix} s_{OC}^{(маг)}(t-\tau), \text{ якщо } t\in[t_0,\zeta_{ПР}), \\ s_{ПР}(t-\tau), \text{ якщо } t\in[\zeta_{ПР},T] \end{Bmatrix}, \\
x_{ОП}(t-\tau)=L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)\eta(t-t_0-\tau)}f(k_{ОП}(t-\tau)).
\end{gathered} \tag{60}
$$

Зазначимо, що стохастичні і середні оптимальні траєкторії $k_{ОП}$, $k_{OC}^{(ОП)}$ і $z_{ОП}$ та оптимальне керування $x_{ОП}$ є кусково-диференційовними функціями, а стохастичні і середні оптимальні керування $s_{MB}^{(ОП)}$ і $s_{ОП}$ – кусково-неперервними на $[t_0,T]$.

Алгоритм знаходження оптимального процесу:

1. Вибрати еколого-економічний „режим” серед „режимів” I-III.
2. Для вибраного „режиму” знайти стохастичні та середні керування $s_{маг}$, $s_{MB}^{(маг)}$ та відповідні стохастичні та середні магістралі $k_{маг}$, $k_{OC}^{(маг)}$ і $z_{маг}$.
3. Перевірити виконання нерівностей (44). Якщо усі виконуються, то стохастичні та середні магістральні керування $s_{MB}^{(маг)}$ і $s_{маг}$, а також відповідні стохастичні і середні магістралі є оптимальними. Вихід із алгоритму.

Якщо хоча б одна із нерівностей (44) не виконується, то переходимо на 4.

4. Визначити праві керування $s_{MB}^{(ПР)}$ і $s_{ПР}$.
5. Обчислити правий момент перемикання керувань $\zeta_{ПР}$ із рівняння (59).
6. Знайти стохастичні та середні праві траєкторії.
7. Обчислити стохастичний та середній оптимальні процеси за формулами (60). Вихід із алгоритму.

МОДЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Вхідні дані: $f(k)=2k^{0.5}$, $\nu=1$, $a=0.1$, $w=0.05$, $L_0=9$, $\eta=0.06$, $\mu_{MB}=0.04$, $\mu_{OC}=0.06$, $\gamma=0.02$, $r=0.0272$, $d=0.18$, $\delta=0.08$, $\tau=1$, $t_0=0$, $T=10$; $\varphi_0(\Theta)=200$, $\Theta\in[-1;0]$, $z_0=5.4$, $k_{OC}^{(0)}=120$, $k_{OC}^{(T)}=84.2546$, $z_T=14.2630$, $k_T=128.8626$, $U(C)=2C^{0.5}$, $\Theta(Z)=-3Z^{1.5}$.

У результаті обчислень одержали середній оптимальний процес, деякі значення якого наведені в табл. 1.

Таблиця 1

t	1	2	3	3.3333	4	5	6	7	8	9	10
$k_{ОП}(t)$	202.5409	208.0628	211.4029	212.4085	196.2767	182.5193	169.8936	158.3013	147.6520	137.8640	128.8626
$k_{ОС}^{(ОП)}(t)$	108.5805	94.3953	82.0634	78.3221	83.7672	85.0726	85.7656	85.9494	85.7110	85.1248	84.2516
$Z_{ОП}(t)$	6.4008	7.6733	9.2385	9.8860	10.4464	11.6232	12.5324	13.2171	13.7138	14.0535	14.2630
$s_{ОП}(t-1)$	0.0046	0.0094	0.0076	0.0196	0.2042	0.2042	0.2042	0.2042	0.2042	0.2042	0.2042
$s_{МВ}^{(ОП)}(t-1)$	0.9954	0.9906	0.9924	0.9804	0.2249	0.2249	0.2249	0.2249	0.2249	0.2249	0.2249

Момент перемикання керування $\zeta_{ПР} = 3.3333$. Еколого-економічне тлумачення отриманих результатів таке. Система рухається по магістралях до моменту перемикання керувань $\zeta_{ПР} = 3.3333$. У цей момент вона сходить із магістралей і дальше рухається по правих траєкторіях. На відрізку часу $[3.3333;10]$ середнє споживання становить 20.42%, середні норми накопичення капіталів у матеріальному виробництві – 22.49% і в очисних спорудах – 57.09%.

Отже, нами визначено еколого-економічні „режими” для вибору пріоритетних процесів на магістральному або правому періодах серед процесів споживання, інвестування в матеріальне виробництво і в очисні споруди.

Також у статті описано алгоритми побудови стохастичних і середніх оптимальних процесів еколого-економічної моделі із нелінійним еколого-економічним критерієм із запізненням для вінерівських процесів.

Список використаних джерел:

1. Григоркив В.С. Агрегированная модель оптимизации экономики с эколого-экономическим критерием / В.С.Григоркив // Кибернетика и системный аналіз. – 1999. – №4. – С.124-133.
2. Основы теории оптимального управления. / Под ред. В.Ф. Кротова. – Москва: Высш. шк., 1990. – 430 с.
3. Бойчук М.В. Моделювання виробничих функцій за допомогою диференціальних моделей другого порядку / М.В.Бойчук, В.М.Бойчук // Наук. вісн. Буковинської держ. фінанс. акад.: Збірник наук. пр. Вип. 3, ч.I: Економічні науки. – Чернівці: Технодрук, 2008. – С. 351-356.
4. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів / А.В.Скороход. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
5. Андреева Е.А. Управление системами с последействием / Е.А.Андреева, В.Б.Колмановский, Л.Е.Шайхет. – Москва: Наука, 1992. – 336 с.
6. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння / під ред.. В.І.Фодчука. – К.: Ін-т матем. НАН України, 1996. – 210 с.
7. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів / В.К.Ясинський. – Чернівці: Вид. Золоті литаври, 2005. – 396 с.
8. Гихман И.И. Управляемые случайные процессы / И.И.Гихман, А.В.Скороход. – К.: Наукова думка, 1977. – 432 с.
9. Юрченко І.В. Методи стохастичного моделювання систем / І.В.Юрченко, Л.І.Ясинська, В.К.Ясинський. – Чернівці: Прут, 2002. – 416 с.
10. Мильштейн Г.Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений / Г.Н.Мильштейн // Теория вероятностей и ее применение. – 1975. – Т.18, №1. – С.106-117.
11. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования / Ю.М.Ермольев. – Москва: Наука, 1976. – 240 с.