УДК 519.876.5:336.732

Р.В.Руська, к.е.н.,
Тернопільський національний економічний університет,
м. Тернопіль

МОДЕЛЮВАННЯ СУКУПНИХ ЗБИТКІВ РИЗИКУ КРЕДИТНОЇ СПІЛКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ГАММА-РОЗПОДІЛУ

Змодельовано сукупні збитки ризику кредитної спілки за допомогою гамма-розподілу на основі статистичних даних.

Смоделированы совокупные убытки риска кредитного союза с помощью распределения гамма на основе статистических данных.

The combined losses of risk of credit union are modelled by means of distribution of gamut on the basis of statistical data.

Ключові слова: кредитна спілка, кредитний портфель, функція розподілу збитків, математичне сподівання, густина гамма-розподілу, метод моментів.

Більшість кредитних спілок України працюють з нестаціонарними сукупностями, за відсутності рівноваги між притоком та відтоком надходжень і, що найважливіше, без чітко сформованих сукупностей за видами кредитування. Таким чином, розмивається поняття „вид кредитування", в той час як методика розрахунку відсотків передбачає, що відсоткові ставки обчислюються для замкнутої кредитної сукупності. За відсутності таких сукупностей відсоткові ставки перестають бути інструментом розподілу збитку і не відображають реальних зобов'язань позичальника і кредитора. У результаті кредитна спілка починає „переливати кошти однієї групи позичальників на користь іншої, що не є функцією кредитування" [1].

За таких умов важко говорити про однорідність кредитного портфеля, а набір різнорідних ризиків у портфелі призводить до непередбачуваності фінансових результатів, оскільки за умов неоднорідної вибірки кредитна спілка не може спиратися на статистичні закономірності. Досягти однорідності вибірки можна лише шляхом відповідного підбору ризиків як на стадії розробки правил і умов кредитування, так і на стадії фактичного формування кредитного портфеля [2].

Основними стохастичними фінансовими потоками в діяльності кредитної спілки є процес надходження за виданими позиками та процес виплат (по депозитах і паях). Ці два процеси протікають в різних масштабах часу і мають різні масштаби вимірювання. Значна кількість наукових праць, зокрема В.Гончаренка, П.Козинця, А.Оленчика, О.Луцишина, А.Морозова, В.Зіновчука, Г.Климка, П.Саблука, О.Крисального, Я.Макферсона, А.Аззі та ін., присвячена розвитку та стійкості кредитних спілок, пошуку ефективних методів та механізмів її забезпечення. Питання, пов’язані з прогнозом надходження коштів на майбутнє, залишається відкритим.

При аналізі статистичних даних про надходження в кредитні спілки України виявлено, що інтенсивність їх надходження не є сталою, а процес надходження не можна вважати стаціонарним (рис. 1).

Наше завдання – змоделювати сукупну функцію розподілу збитків. Для отримання апроксимації розподілу сукупного збитку S групи ризиків апроксимуємо розподіл сукупного збитку R_i, і – окремого ризику неперервним розподілом, що допускає явний ріст згорток. Для грубої апроксимації розподілу величини R_i, досить знати, що основна маса ймовірностей знаходиться в нулі. У процесі згортки неточність апроксимації досить швидко нівелюється і досягаються дуже близькі до реальної моделі сукупного збитку, принаймні для основної маси ймовірностей.

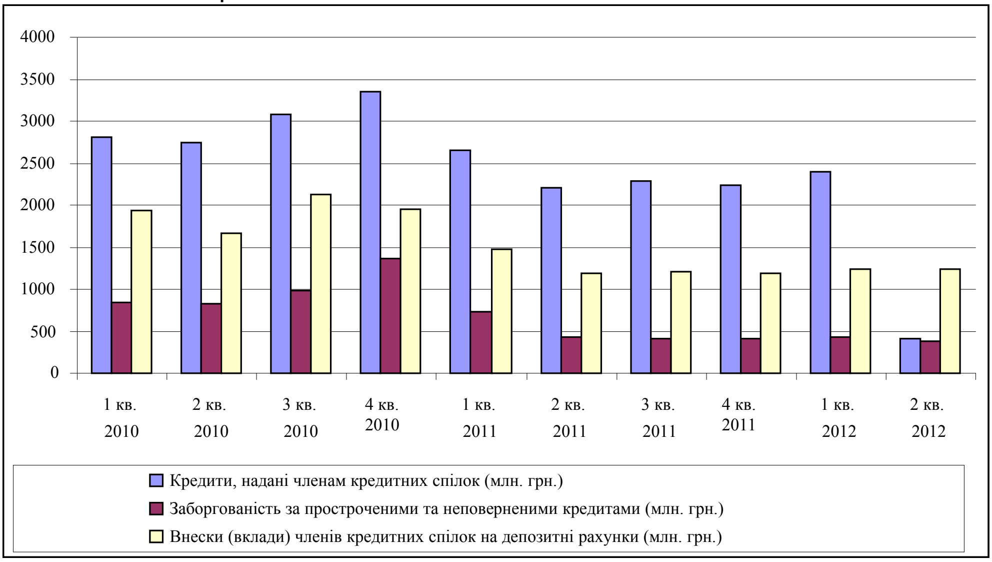

*Рис. 1. Розподіли розмірів внесків до кредитних спілок по Україні**

* Складено автором за даними [3]

Найвідомішим розподілом на інтервалі $(0,\infty)$, що дозволяє розрахувати згортки в явному вигляді, є гамма-розподіл із щільністю

$$f_{R_I}(x)=\exp(-x\alpha/\mu)\cdot x^{\alpha-1}\cdot(\alpha/\mu)^{\alpha}/G(\alpha),\ x>0\,.$$

Відступаючи від звичайного уявлення щільності гамма-розподілу, ми вибрали параметризацію за участю математичного очікування μ. Дисперсія гамма-розподілу дорівнює μ^2/α, коефіцієнт варіації $1/\sqrt{\alpha}$, асиметрія $2/\sqrt{\alpha}$. Параметр форми a визначає вид графіка щільності (рис. 2).

При α=1 спадає по експоненті з точки $g(0)=1$ – експоненціальний розподіл; при α<1 графік виглядає ще більш асимметричний і ще крутіше спадає з точки $g(0)=\infty$; при α> 1 справедлива рівність $g(0)=0$; єдина мода має значення μ-μ/α, а вид щільності з зростанням α стає все симетричнішим і більше схожий на нормальний розподіл (графіки щільності при α=0,04 і α=0,2 перетинаються ліворуч і праворуч за межами рис. 2).

Оскільки для нас важливо, щоб апроксимувався розподіл величини R_i, ми приймаємо в розгляд тільки гамма-розподіл з параметром форми α<1. При α=0,02, наприклад, 89% ймовірнісної маси зосереджено в області нижче значення μ/10. Спочатку припустимо однорідну групу ризиків і апроксимуємо невідомий розподіл величини R_i гамма-розподілом з параметрами $\mu=m$ і $\alpha=m^2/s^2$, де $m=M(R_i,)$ і $s^2=var(R_i)$. Параметри розподілу можна знайти з умов рівності відповідних теоретичних і емпіричних моментів. Тоді в результаті n-кратної згортки гамма-розподілів з параметрами μ і α отримаємо розподіл сукупного збитку групи n незалежних ризиків R_i, n-кратна згортка гамма-розподілів знову дає гамма-розподіл, але з параметром середнього $n\cdot\mu$ і параметром форми $n\cdot\alpha$. Перехід від сукупного збитку S до нормованої на об'єм величиною $Z=S/n$ не змінює тип розподілу: Z буде мати гамма-розподіл з параметром середнього μ і параметром форми $n\cdot\alpha$.

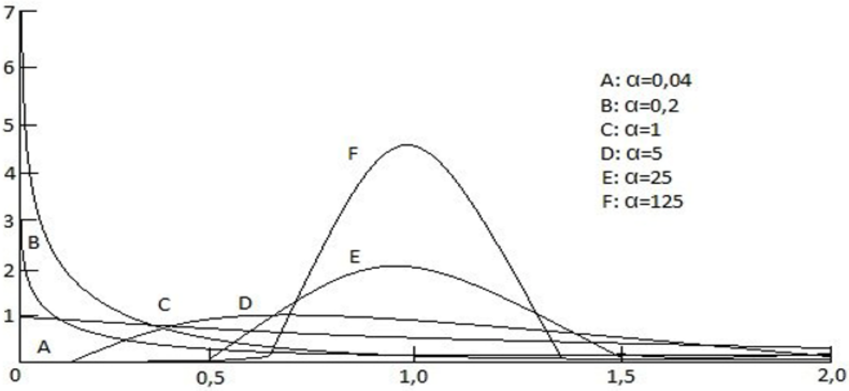

Рис. 2. Густина гамма-розподілу з математичним сподіванням 1

Побудований на основі прийнятних апроксимацій розподілів окремих ризиків гамма-розподіл може вважатися цілком реалістичною моделлю для сукупного і нормованого збитків групи однаково розподілених незалежних ризиків. До того ж гамма-розподіл володіє ще однією дуже вигідною для нас властивістю: сума незалежних гамма-розподілених ризиків R_i, має гамма-розподіл і в тому випадку, коли параметри μ_i і α_i, не однакові для всіх ризиків і, але відношення цих параметрів постійне $\mu_i/\alpha_i,=c$. Ця властивість дає нам можливість моделювати за допомогою гамма-розподілу сукупний збиток групи ризиків з різними сумами. Ми знову відштовхуємося від розподілів окремих ризиків, що гарантує найбільшу правдоподібність моделі сукупного збитку. Припустимо для сукупного збитку R_i, окремого ризику із кредитною сумою u_i, (при $M(R_i)=m\cdot u_i$ і $var(R_i,)=s^2u_i$, [4]) гамма-розподіл з параметрами $\mu_i=m\cdot u_i$ і $\alpha_i=m^2u_i,/s^2$. Тоді μ_i/α_i дійсно для всіх ризиків однаково, і $S=R_1,+...+R_l$, теж має гамма-розподіл, але з параметром математичного сподівання $\mu_1+\ldots+\mu_l=m\cdot v$ і параметром форми $\alpha_1+...+\ \alpha_l,=m^2\cdot v/s^2$, де $v=u_1+...+\cdot u_l$. Як бачимо, для отримання розподілу сукупного збитку нам знову досить просто скласти параметри. Ставка збитку $Z=S/v$ матиме гамма-розподіл з параметрами m і $m^2\cdot v/s^2$.

Таким чином, як в однорідному, так і в неоднорідному випадку ми можемо моделювати нормовану на обсяг величину збитку Z гамма-розподілом з параметрами μ і $v\cdot\alpha$, де $\mu=m$ – середнє значення, v – відомий обсяг (кількість років або сукупна кредитна сума) і $\alpha=m^2/s^2$. В останній параметризації задіяний обсяг і α означає параметр форми для однієї одиниці об'єму. Якщо значення m і s^2, значить, μ і α вважати постійними протягом ряду років j=l,…J то в розподілі сукупного збитку буде мінятися тільки обсяг v.

Нам вдалося описати нормований на обсяг сукупний річний збиток Z, як однорідної, так і неоднорідної групи ризиків двохпараметричного розподілу.

Розглянемо гістограму розподілу суми внесків по кредитах для досліджуваної кредитної спілки, за якою можна прослідкувати типові закономірності шуканого розподілу.

По-перше, одразу можна відзначити величезний розкид сум внесків (а відповідно і позикових сум) від кількох десятків до десятків тисяч гривень, що свідчить про те, що портфель складається з надзвичайно різнорідних ризиків без чіткої політики їх підбору. А саме на етапі відбору і класифікації ризиків (у процесі андерайтингу) закладається фундамент фінансової стійкості спілки [5].

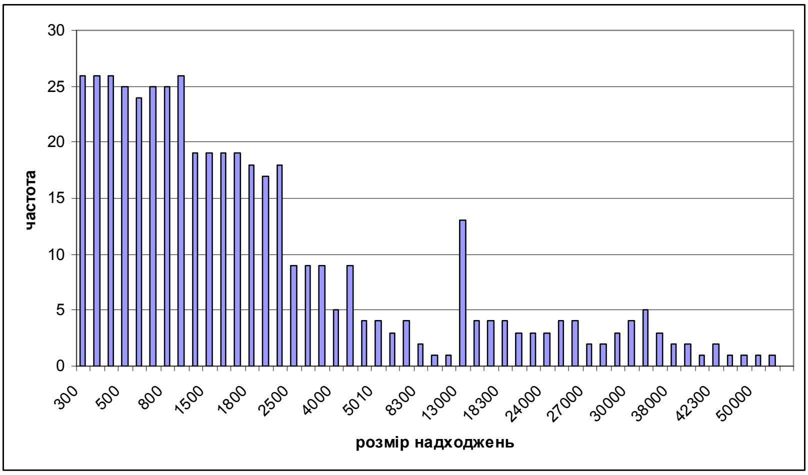

*Рис. 3. Гістограма розподілу розміру внесків для портфеля договорів досліджуваної спілки**

* Складено автором

По-друге, візуальний аналіз отриманої гістограми дозволяє висунути гіпотезу про те, що на різних інтервалах суми внесків розподілені за різними законами розподілу. Підібрати криву щільності розподілу ймовірностей, яка б забезпечила задовільне наближення емпіричних і теоретичних даних на усьому проміжку від нуля до максимальної величини внеску не вдається. Статистичний аналіз гістограми дозволяє виділити кілька проміжків, у межах яких розміри надходжень однаково розподілені. Зокрема, для гістограми (рис. 3) доцільно виділити три проміжки: (0; 13000], (13000; 42000], (42000; 60000]. Висунувши гіпотези про тип теоретичного розподілу випадкових величин на кожному з виділених інтервалів, необхідно оцінити параметри розподілів методом моментів або максимальної правдоподібності і визначити, з яким рівнем значимості гіпотеза про закон розподілу узгоджується з реальними даними.

Першим кроком буде перевірка гіпотези про закон розподілу випадкової величини R_i на інтервалі (0; 13000]. За вибіркою значень величини внесків на цьому інтервалі та заданим рівнем значимості необхідно прийняти або відхилити гіпотезу: генеральна сукупність має гамма-розподіл з параметрами λ>0 і α>0, тобто:

$$F_{R_k}(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{L(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}dt$$
$$f_{R_k}(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{L(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda t} \qquad (1),$$

де L – гамма-функція, $L(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

При знаходженні функції розподілу необхідно врахувати, що неперервна величина R_i має гамма-розподіл лише на інтервалі (0; 13000], причому площа під кривою щільності розподілу на даному інтервалі буде відповідати ймовірності попадання випадкової величини в цей проміжок, тобто: $\int_0^{13000} k_1 f_{gama}(x)dx=\frac{n_1}{N}=0,69883$.

Звідси можна знайти нормуючий коефіцієнт k_1 для функції щільності розподілу:

$$k_1=0,69883/\int_0^{13000} f_{gama}(x)dx \qquad (2).$$

Оскільки гамма-розподіл залежить від двох перших моментів, то для знаходження його параметрів емпіричні оцінки середнього значення і дисперсії прирівнюємо до теоретичних моментів цього ж порядку, які залежать від невідомих параметрів. Теоретичні моменти найпростіше знайти, користуючись властивістю перетворення Лапласа неперервної випадкової величини: $M(\mathrm{Ri})=-\phi'_{\mathrm{Ri}}(0)$; $D(\mathrm{Ri})=\phi''_{\mathrm{Ri}}(0)-\left(\phi'_{\mathrm{Ri}}(0)\right)^2$,

де $\phi_{\mathrm{Ri}}(t)=\left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$ – перетворення Лапласа для гамма-розподілу.

Оскільки $\phi'_{\mathrm{Ri}}(t)=-\frac{\alpha}{\lambda}\left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha-1}$, то $\begin{cases} M(\mathrm{Ri})=-\phi'_{\mathrm{Ri}}(0)=\frac{\alpha}{\lambda} \\ D(\mathrm{Ri})=\frac{\alpha}{\lambda^2} \end{cases}$ (3).

Розв'язавши систему рівнянь (3), знайдемо незміщені, істотні точкові оцінки параметрів гамма-розподілу. Для досліджуваної кредитної спілки

$M(R_i)=2756,88$; $D(R_i)=15089575$; $\alpha=0,50368$, $\lambda=0,0001827$.

Перевіримо гіпотезу про закон розподілу за критерієм χ^2 Пірсона.

Статистика $\chi 2$ визначається:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(p_{ei} - p_{0i}\right)^2}{p_{0i}} \quad (4),$$

де: p_{ei}. – спостережувана частота попадання випадкової величини в і-тий інтервал;

p_{0i} – теоретична ймовірність попадання в і-тий інтервал;

k – кількість інтервалів.

Нейман і Пірсон показали, що якщо для обчислення ймовірностей p_{0i}. використовується ефективна й асимптотично нормальна оцінка невідомого s-вимірного параметра гіпотетичного розподілу за групованою вибіркою, то статистика, визначена за формулою (4) при $n\to\infty$ має χ^2 - розподіл з k-s-1 ступенями вільності [6]. У табл. 1 наведені спостережувані відносні частоти на інтервалі (0; 13000] й очікувані за гамма-розподілом.

Таблиця 1

*Результати апроксимації розміру внесків гамма-розподілом**

інтервал, грн.	Частота спостережувана (p_{ei})	Значення інтегральної функції гамма-розподілу F_{Ri} (x)	Частота теоретична (p_{0i})	$\frac{\left(p_{ei}-p_{0i}\right)^2}{p_{0i}}$
0-500	91	0,32794	83	0,771084
501-1000	45	0,45144	37	0,923077
1001-1500	16	0,53802	21	0,8
1501-2000	17	0,60469	16	0,0625
2001-2500	10	0,65833	13	0,692308
2501-3000	8	0,70262	11	0,4
3001-3500	10	0,73982	9	0,111111
3500-4000	8	0,77143	8	0
4001-4500	6	0,79854	6	0
4501-5000	4	0,82195	6	0,666667
5001-5500	6	0,84227	5	0,2
5501-6000	3	0,86001	4	0,25
6001-6500	2	0,87554	4	1
6501-7000	2	0,88918	3	0,333333
7001-7500	3	0,90119	3	0
7501-8000	3	0,91180	3	0
8001-8500	2	0,92119	2	0
8501-9000	1	0,92951	2	0,5
9001-9500	1	0,93690	2	0,5
9501-10000	2	0,94346	2	0
10001-10500	3	0,94931	1	2
10501-11000	2	0,95453	1	1
11001-11500	1	0,95918	1	0
11501-12000	2	0,96705	1	1
12001-12500	1	0,98037	1	0
12501-13000	1	0,99990	1	0
Статистика χ^2				11,21008

* Складено автором

Оскільки розрахункова величина $\chi^2=11,21$ є меншою від критичного табличного значенням $\chi^2_p=11,29$ для рівня значимості 0,02 і 23 (k-s-1=26-2-1=23) ступенів вільності, то з ймовірністю 0,98 на проміжку (0; 13000] емпіричний розподіл випадкової величини R_i відповідає теоретичному гамма-розподілу.

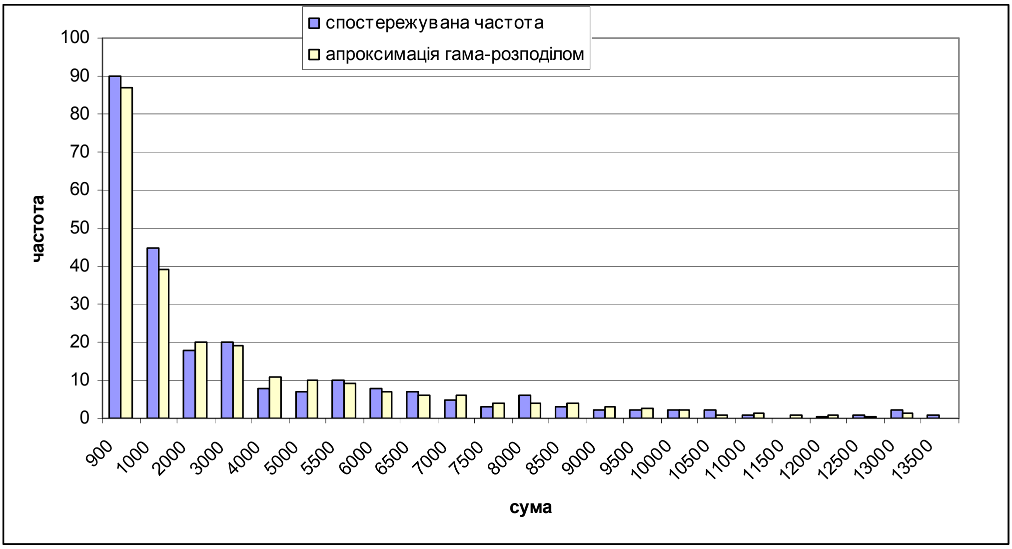

*Рис. 4. Гістограма частот на проміжку (0;13000]**

* Складено автором

Цей висновок, підтверджений гістограмою на рис. 4, дає підстави використовувати нормований гамма-розподіл для моделювання величини внесків досліджуваної кредитної спілки на інтервалі (0; 13000]. Таким чином ми можемо моделювати сукупний річний збиток гамма-розподілом.

З гістограми (рис. 3) видно, що на інтервалі (13000;42000) з'являються нові сплески відносних частот, які вже не можна пояснити гамма-розподілом. Оскільки процес їх загасання доволі тривалий, то для апроксимації випадкової величини R_i на цьому проміжку доцільно застосовувати розподіли з «важкими хвостами».

Список використаних джерел:

1. Марцелова А. И. Учет процентных доходов и расходов кредитными организациями / А. И. Марцелова // Финансы и кредит. -2008. – №43. С. 10-18.

2. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / за ред. О.Т.Іващука. – Тернопіль ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.

3. http://www.dfp.gov.ua/733.html (офіційний сайт Державної комісії з регулювання ринків фінансових послуг України).

4. Руська Р. В. Моделювання обсягу кредитного портфеля кредитної спілки в залежності від дисперсії неповернених позик./ Руська Р. В. / Вісник Тернопільського національного економічного університету / Тернопіль ТНЕУ – 2012 –Випуск 4.– С. 133-137.

5. Валенцева Н. Проблемы управления рисками / Н.Валенцева // Деньги и кредит. – 2004. – №4 – С. 56-63.

6. Ситник В. Ф. Імітаційне моделювання [Навч. посібник] / Ситник В. Ф., Орленко Н. С. – К.: КНЕУ, 1998. – 232 с.