УДК 519.863 : 330.3

**М. В. Бойчук**, к. ф.-м. н, доцент,
**О. Ю. Вінничук**, к.е.н., доцент,
**І.С. Вінничук**, к.е.н., асистент,
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
м. Чернівці

# СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПОВЕДІНКИ ФІРМИ В УМОВАХ ДОСКОНАЛОЇ КОНКУРЕНЦІЇ

*Анотація*

Запропонована стохастична модель поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції при вінерівському і пуассонівському процесах. Кінцевий випуск продукції є виробничою функцією капіталу та трудових ресурсів (робочої сили), які змінюються за експоненціальним законом, а саме виробнича функція є монотонно зростаючою та вгнутою за своїми аргументами. В стохастичну економіко-математичну модель входить функція інвестиційних витрат, яка залежить від валових інвестицій та є монотонно зростаючою та вгнутою. Критерієм мети виступає максимізація середнього (інтегрального) дисконтованого прибутку як різниці випуску продукції та інвестиційних витрат.

Для дослідження такої стохастичної економіко-математичної моделі використовується так звані стохастичні достатні умови оптимальності. Встановлено умови на вхідну інформацію стохастичної економіко-математичної моделі, при яких ця модель має оптимальний процес. Проведено опис структури оптимального процесу та наведено довірчий проміжок за заданою ймовірності для реальних значень оптимальної траєкторії за капіталом.

*Ключові слова:* стохастичне моделювання, досконала конкуренція, магістральний процес, момент перемикання керування, оптимальний процес.

**М.В. Бойчук**, д.ф.-м.н., доцент,
**Е.Ю. Винничук**, к.э.н., доцент,
**И.С. Винничук**, к.э.н., асистент,
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича,
г. Черновцы

# СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОВЕДЕНИЯ ФИРМЫ В УСЛОВИЯХ СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

*Аннотация*

Предложенная стохастическая модель поведения фирмы в условиях совершенной конкуренции при винеровскому и пуассоновском процессах. Конечный выпуск продукции является производственной функцией капитала и трудовых ресурсов (рабочей силы), которые изменяются по экспоненциальному закону, а именно производственная функция есть монотонно растущей и вогнутой по своим аргументам. В стохастическую экономико-математическую модель входит функция инвестиционных расходов, которая зависит от валовых инвестиций и является монотонно возрастающей и вогнутой. Критерием цели выступает максимизация среднего (интегрального) дисконтированного дохода как разницы выпуска продукции и инвестиционных расходов.

Для исследования такой стохастической экономико-математической модели используются так называемые стохастические достаточные условия оптимальности. Установлены условия на входную информацию стохастической экономико-математической модели, при которых эта модель имеет оптимальный процесс. Проведено описание структуры оптимального процесса и приведены доверительный промежуток по заданной вероятности для реальных значений оптимальной траектории по капиталу.

*Ключевые слова:* стохастическое моделирование, совершенная конкуренция, магистральный процесс, момент переключения управления, оптимальный процесс.

**Постановка проблеми.** Неврахування деяких економічних показників у математичних моделях, невизначеність деяких коефіцієнтів моделі, неточність задання початкових умов системи та ін., тобто невизначеність та неточність вхідної інформації економіко-математичної моделі приводить до розгляду стохастичного моделювання динамічних систем.

Тому актуальним як у теоретичному, так і практичному плані є стохастичне моделювання динамічних систем.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У навчальних посібниках [1; 2] запропоновано одну з найпростіших детермінованих оптимізаційних моделей поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції без врахування обмеження на кінцевий стан системи та пропонується її дослідження з допомогою необхідних умов оптимальності [3; 4] та ін. або достатніх умов оптимальності [5; 6] та ін.

На сьогодення дослідження стохастичних оптимальних динамічних систем відбувається в двох напрямах.

*До першого напряму* відносяться роботи [7; 8] та ін., в яких для оптимальних динамічних систем в умовах невизначеності та неточних вхідних при відомих функціях розподілу визначаються градієнти критеріїв мети (необхідні умови оптимальності), а для чисельної реалізації використовуються відомі градієнтні методи.

*Другому напряму* присвячені роботи [9; 10] та ін., в яких для дослідження стохастичних оптимальних динамічних систем при вінерівських і пуассонівських процесах [11, с. 7-8] використовуються стохастичні достатні умови оптимальності [9, с. 117-119]. Причому, в роботі [10] наведено економічне обґрунтування використання вінерівських і пуассонівських процесів при стохастичному моделюванні динамічних систем.

Дослідження даної роботи при стохастичному моделюванні поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції при вінерівському та пуассонівському процесах відносяться до другого напряму.

**Постановка завдання.** Побудувати стохастичну модель оптимальної поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції при вінерівському та пуассонівському процесах і провести дослідження з допомогою використання стохастичних достатніх умов оптимальності.

**Виклад основного матеріалу.** Спочатку формалізуємо детерміновану економіко-математичну модель, а потім на її основі – стохастичну модель.

*Детермінована економіко-математична модель*

Опишемо припущення для побудови детермінованої економіко-математичної моделі [2, с. 20-21].

*Припущення 1.* Нехай фірма-виробник випускає продукцію, обсяг випуску якої залежить від виробничого капіталу $K$ і трудових ресурсів (робочої сили) $L(t)=L_0e^{n(t-t_0)}$, де $t$ – часова змінна на досліджуваному відрізку часу $[t_0,T]$, $L_0$ – початковий стан робочої сили, $n$ – сталий темп зростання робочої сили. Обсяг випуску продукції описується неокласичною виробничою функцією $F(K,L)$ з властивостями [12, с. 6-7, умови 1)-4)]: $F(0,0)=F(K,0)=F(0,L)=0$, $F(K\geq 0,L\geq 0)\geq 0$ – монотонно зростаюча за капіталом $K$ ($F_K'>0$) та за робочою силою $L$ ($F_L'>0$), увігнута за капіталом $K$ ($F_{K^2}''<0$) та за робочою силою $L$ ($F_{L^2}''<0$).

*Припущення 2.* Інвестиційні витрати описуються функцією витрат $U(I)$ від валових інвестицій фірми $I(t)\geq 0$ з властивостями: $U(I\geq 0)\geq 0$ – монотонно зростаюча ($U_I'>0$) та вгнута ($U_{I^2}''<0$).

*Припущення 3.* Валові інвестиції $I$ фірми розподіляються на чисті інвестиції $J$, що витрачаються на приріст капіталу ($J=\dot{K}$, $\dot{K}\equiv dK/dt$) та на амортизацію $A=\mu K$, де $\mu\in(0,1)$ – норма амортизації капіталу, тобто $\dot{K}(t)=-\mu K(t)+I(t)$, $t\in[t_0,T]$.

*Припущення 4.* Відомий початковий стан капіталу $K(t_0)=K_0>0$ в момент часу $t_0$, а на кінцевий стан капіталу $K(T)$ накладається обмеження $K(T)\leq K_T\,(K_T>0)$.

*Припущення 5.* Якщо $p$ – ринкова ціна продукції на досліджуваному проміжку часу $[t_0,T]$, то в момент часу $t$ прибуток фірми складає величина $\left[pF(K(t),L(t))-U(I(t))\right]$.

Задача фірми полягає в тому, щоб вибрати таку інвестиційну політику $\Pi_{\text{оп}}=\{K_{\text{оп}}(t),I_{\text{оп}}(t),t\in[t_0,T]\}$, яка б гарантувала їй досягнення максимального прибутку за умови введених вище обмежень (припущення 1-4) і формалізується такою задачею оптимального керування

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{t_0}^{T} e^{-\delta(t-t_0)}\left[pF(K(t),L(t))-U(I(t))\right]dt\to\max_{I(t)\geq 0},\\ \dot{K}(t)=-\mu K(t)+I(t),\\ I(t)\geq 0,\ t\in[t_0,T],\\ K(t_0)=K_0,\ K(T)\leq K_T,\end{cases}$$

де $\delta>0$ – норма дисконту.

Ця задача конкретизує оптимізаційну модель поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції. Знайшовши оптимальні інвестиції $I_{\text{оп}}(t)$ та відповідну оптимальну траєкторію $K_{\text{оп}}(t)$, ми тим самим побудуємо оптимальну стратегію фірми.

У роботі [10] економічно обґрунтовано при стохастичному моделюванні використання в динаміці економічних показників лінійної комбінації вінерівських і пуассонівських випадкових процесів [11, с. 7-8]. Використаємо цей факт для формалізації стохастичної моделі поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції.

На основі детермінованої моделі поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції формалізуємо стохастичну модель.

*Стохастична економіко-математична модель*

Нехай $\{\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}\}$ ймовірнісний простір із $\sigma$-алгеброю $\{\mathrm{F}_t, t\in[t_0,T]\}\subset\sigma$, множиною елементарних подій $\Omega$ та мірою (ймовірністю) $P$; $\xi_i(t)\equiv\xi_i(t,\omega)\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $i=1,2$) – $\mathrm{F}_t$-вимірний вінерський стандартний випадковий процес із нульовим математичним сподіванням $M\xi_i(t)=0$ і одиничною дисперсією

$M\xi_i^2(t)=1$, $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$; $\eta_i(t)\equiv\eta_i(t,\omega)\in\mathbb{R}$ – $\mathrm{F}$-вимірний пуассонівський процес із математичним сподіванням $M\eta_i(t)=\lambda_i(t-t_0)$, $\lambda_i\equiv const_i$, $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$, причому, $\xi(t)$ і $\eta(t)$ – незалежні випадкові процеси.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}\}$ задано випадковий процес капіталу $K(t)$, $t\in[t_0,T]$, який

– описується диференціальною моделлю в формі Іто [13, с. 258; 11, с. 154-163]

$$\dot{K}(t)=\mu K(t)+I(t)+\alpha\dot{\xi}(t)+\beta\dot{\eta}(t),\ t\in[t_0,T] \tag{1}$$

– задовольняє початкову умову

$$K(t_0)=K_0,\ K_0\in\mathrm{F}_{t_0}; \tag{2}$$

– задовольняє обмеження на кінцевий стан системи

$$K(T)\ge K_T, \tag{3}$$

де $\alpha$ і $\beta$ – сталі величини.

На валові інвестиції $I$ накладається обмеження

$$I(t)\ge 0,\ t\in[t_0,T]. \tag{4}$$

Задача полягає в тому, щоб знайти оптимальне керування за валовими інвестиціями (інвестиціями) $I_{\text{оп}}(t)$ і відповідну оптимальну траєкторію за капіталом $K_{\text{оп}}(t)$, $t\in[t_0,T]$, які б максимізували середній (інтегральний) дисконтований прибуток

$$M\int_{t_0}^{T} e^{-\delta(t-t_0)}\left[pF\left(K(t),L(t)\right)-U\left(I(t)\right)\right]dt\to\max_{I(t)\ge 0} \tag{5}$$

за умови виконання обмежень (1)-(4), де $\delta$ – норма дисконту, $M$ – математичне сподівання.

У задачі стохастичного оптимального керування (1)-(5) керуванням виступають інвестиції $I$, а фазовою траєкторією – капітал $K$. Дослідження задачі (1)-(5) проведемо в три етапи:

1) визначення магістрального процесу;
2) знаходження правого процесу;
3) побудова оптимального процесу.

**1. Магістральний процес**

Магістральний процес включає в себе визначення магістрального керування за інвестиціями $I_{\text{маг}}(t)$ і відповідної траєкторії за капіталом $K_{\text{маг}}(t)$, $t \in [t_0, T]$, тобто $\Pi_{\text{маг}} = \{K_{\text{маг}}(t), I_{\text{маг}}(t), t \in [t_0, T]\}$.

*Магістральне керування.* За стохастичними достатніми умовами оптимальності для задачі (1)-(2), (4)-(5) (без обмеження на кінцевий стан системи (3)) запишемо рівняння Беллмана з функціонально незалежними змінними та з крайовою умовою [9, с. 217-219]:

$$\begin{cases} \inf\limits_I R(t,K,I,V) \equiv \inf\limits_I \left\{ \partial V / \partial t + \partial V / \partial K \left( I - \mu K \right) + 0{,}5\alpha^2 \partial^2 V / \partial K^2 + \right. \\ \left. + \lambda \left[ V(t, K+\beta) - V(t,K) \right] - e^{-\delta(t-t_0)} \left[ pF(K,L) - U(I) \right] \right\} = 0, \\ L(t) = L_0 e^{n(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T], \quad V(T, K_T) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

де шукана функція $V$ – неперервна-диференційована функція один раз по $t$ та двічі по $K$ на декартовому добутку $[t_0, T] \times \{K \geq 0\}$.

Невідому функцію $V$ будемо шукати у вигляді:

$$V(t,K) = le^{-\delta(t-t_0)} K - le^{-\delta(t-t_0)} K_T, \; t \in [t_0, T] \tag{7}$$

де стала $l$ підлягає визначенню (вибору).

Підставимо (7) у рівняння Беллмана (6). Запишемо необхідну умову оптимальності функції $R$ по $I$ – рівність нулеві частинної похідної першого порядку $\partial R / \partial I = 0$

$$l - U'(I) = 0. \tag{8}$$

Рівняння Беллмана (6) набуває вигляду

$$\begin{cases} l\left[ I - (\mu + \delta) K \right] + \lambda l \beta - pF(K,L) + U(I) = 0, \\ L(t) = L_0 e^{n(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases} \tag{9}$$

У частинному випадку $U(I) = \gamma I, \; \gamma = const > 0$ стала $l = -\gamma$ ($l < 0$), а рівняння (9) має вигляд

$$\gamma(\mu + \delta) K - pF(K,L) = 0, \; L(t) = L_0 e^{n(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T]. \tag{10}$$

Оскільки $U'(I > 0) > 0$, то стала $l > 0$. Одержали систему рівнянь (8)-(9) по визначенню керування за інвестиціями $I$ та яку можна розв’язати одним із числових методів [14] і тим самим знайти магістральне керування за інвестиціями $I_{\text{маг}}(t)$, $t\in[t_0,T]$. Зазначимо, що вибором сталої $l>0$ можна домогтися того, щоб $I_{\text{маг}}(t)\geq 0$, $t\in[t_0,T]$.

У частинному випадку $U(I)=\gamma I,\quad \gamma>0$ із рівняння (10) визначається оптимізаційна величина за капіталом $\tilde{K}(t)$, $t\in[t_0,T]$, за якою з середньої динаміки капіталу (1) знаходимо інвестиції $\tilde{I}(t)=\dot{\tilde{K}}(t)+\mu\tilde{K}(t)-\lambda\beta$, $t\in[t_0,T]$, а відповідно магістральне керування за інвестиціями $I_{\text{маг}}$ набуває вигляду

$$I_{\text{маг}}(t)=\begin{cases}0,\ \tilde{I}(t)\leq 0,\\ \tilde{I}(t),\ \tilde{I}(t)>0,\end{cases}\qquad t\in[t_0,T].$$

Причому, магістральне керування $I_{\text{маг}}$ є детермінованою величиною та не залежить від коефіцієнта при прирості вінерівського процесу в диференціальній моделі (1).

Зауважимо, що середню динаміку капіталу можна отримати з диференціальної моделі (1), взявши математичне сподівання від лівої та правої частин цієї моделі та використавши властивості вінерівського та пуассонівського процесів

$$M\dot{\xi}(t)=\left(M\xi(t)\right)'=0,\ M\dot{\eta}(t)=\left(M\eta(t)\right)'=M\left(\lambda(t-t_0)\right)'=\lambda,\ t\in[t_0,T] \quad (11)$$

та яке має вигляд

$$\dot{K}(t)=-\mu K(t)+I(t)+\lambda\beta,\ t\in[t_0,T]. \quad (12)$$

Відповідна середня магістраль за капіталом $K^{(c)}_{\text{маг}}$ знаходиться з середньої динаміки за капіталом (12) при $I=I_{\text{маг}}$ та середній початковій умові (2) та набуває вигляду

$$K^{(c)}_{\text{маг}}(t)=MK_0e^{-\mu(t-y)}\left[I_{\text{маг}}(y)+\lambda\beta\right]dy,\ t\in[t_0,T],$$

а стохастична магістраль $K_{\text{маг}}$ визначається одним із числових методів [13, с. 269-276; 15] із стохастичної початкової задачі (1)-(2) при $I=I_{\text{маг}}$. Зауважимо, що стохастичні диференціальні рівняння не інтегруються у звичному розумінні.

Таким чином, отримали магістральний процес $\Pi_{\text{маг}}=\left\{k_{\text{маг}}(t),I_{\text{маг}}(t),t\in[t_0,T]\right\}$. Але магістральний процес отриманий при неврахуванні обмеження на кінцевий стан системи (3). Перевіримо виконання цього обмеження. Якщо кінцевий стан середньої магістралі $K^{(c)}_{\text{маг}}(T)\equiv Mk_{\text{маг}}(T)$ не менший за кінцевий стан системи $K_T$, тобто $MK_{\text{маг}}(T)\geq K_T$, то середній і стохастичний магістральний процес $\Pi_{\text{маг}}$ є оптимальним процесом $\Pi_{\text{оп}}=\left\{K_{\text{оп}}(t),I_{\text{оп}}(t),t\in[t_0,T]\right\}$: $K_{\text{оп}}(t)=K_{\text{маг}}(t)$,

$I_{\text{оп}}\left(t\right)=I_{\text{маг}}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$. При побудові нерівності $K_{\text{маг}}^{(c)}\left(T\right)<K_T$ необхідно проводити побудову правого процесу.

**2. Правий процес**

Правий процес включає в себе визначення правого керування $I_{\text{пр}}\left(t\right)$, відповідної правої траєкторії $K_{\text{пр}}\left(t\right)$, $t\in\left[\varsigma,T\right]$ і момента перемикання керування $\varsigma$.

*Праве керування.* Оскільки виконується нерівність $K_{\text{маг}}^{(c)}\left(T\right)<K_T$, то середня права траєкторія $K$ повинна монотонно зростати на $\left[t_0,T\right]$, тобто $\dot{K}\left(t\right)>0$, $t\in\left[t_0,T\right]$

$$\dot{K}\left(t\right)=-\mu K\left(t\right)+I\left(t\right)+\lambda\beta>0,\ t\in\left[t_0,T\right]. \tag{13}$$

Із нерівності (13), обмеження на керування $I\left(t\right)\geq 0$, $t\in\left[t_0,T\right]$ і обмеження на стан $K_{\text{маг}}^{(c)}\left(t\right)\leq K\left(t\right)\leq K_T$ сформулюємо задачу лінійного програмування з параметром (ЛПП) для знаходження правого керування за інвестиціями $I_{\text{пр}}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$:

$$\begin{cases}\max\left(-y\left(t\right)\right),\\ -\mu K\left(t\right)+I\left(t\right)+\lambda\beta-y\left(t\right)=\varepsilon_0,\\ K_{\text{маг}}^{(c)}\left(t\right)\leq K\left(t\right)\leq K_T,\\ I\left(t\right)\geq 0,\ y\left(t\right)\geq 0, t\in\left[t_0,T\right]\end{cases} \tag{14}$$

та яку можна розв'язати при кожному $t$ одним із числових методів [16, 17], де $\varepsilon_0>0$ – досить мале задане число.

Якщо задача ЛПП не має розв'язку, то це означає, що кінцевий стан системи $K_T$ є недосяжним. Необхідно послабити умови на вхідну інформацію стохастичної задачі (1)-(5).

Нехай існує неперервний на $\left[t_0,T\right]$ розв'язок $I_{\text{пр}}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ задачі ЛПП (14). Тоді цей розв'язок $I_{\text{пр}}\left(t\right)$ є правим керуванням за інвестиціями.

*Права траєкторія та момент перемикання керування.* Середню праву траєкторію $K_{\text{пр}}^{(c)}\left(t\right)$, $t\in\left[t_0,T\right]$ і момент перемикання керування $\xi$ можна визначити методом Рунге-Кутта із такої задачі

$$\begin{aligned}&\dot{K}\left(t\right)=-\mu K\left(t\right)+I_{\text{пр}}\left(t\right)+\lambda\beta,\ t\in\left[\xi,T\right],\\ &K\left(\xi\right)\in D_\varepsilon=\left\{K\in\mathbb{R}\ \middle|\ K_{\text{маг}}^{(c)}-\varepsilon\leq K\left(t\right)\leq K_{\text{маг}}^{(c)}+\varepsilon<K_T\right\},\\ &K\left(T\right)=K_T.\end{aligned}$$

Відзначимо, що момент перемикання керування $\xi$ є детермінованою величиною та не залежить від коефіцієнта при прирості вінерівського процесу $\dot{\xi}(t)$ у динаміці руху капіталу (1). А відповідна неперервно-диференційована на $t\in[\xi,T]$ стохастична права траєкторія $K_{\text{пр}}(t)$, $t\in[\xi,T]$ знаходиться одним із числових методів [13, с. 267-276; 15] із стохастичної динаміки капіталу (1) при стохастичній початковій умові $K(\xi)=K_{\text{маг}}(\xi)$ за визначеним моментом перемикання керування $\xi$ та $I(t)=I_{\text{пр}}(t)$, $t\in[\xi,T]$. Таким чином, визначено середній і стохастичний правий процес $\Pi_{\text{пр}}=\{K_{\text{пр}}(t),I_{\text{пр}}(t),t\in[\xi,T]\}$.

**3. Оптимальний процес**

Згідно з результатами [9, с. 217-219; 2, с. 174-184] слейка у момент перемикання керування $\xi$ магістрального $\Pi_{\text{маг}}$ і правого $\Pi_{\text{пр}}$ процесів дає оптимальний процес

$$\Pi_{\text{оп}}=\{K_{\text{оп}}(t),I_{\text{оп}}(t),t\in[t_0,T]\}: \qquad K_{\text{оп}}(t)=\begin{cases}K_{\text{маг}}(t),t\in[t_0,\xi],\\ K_{\text{пр}}(t),t\in[\xi,T],\end{cases}$$

$$I_{\text{оп}}(t)=\begin{cases}I_{\text{маг}}(t),t\in[t_0,\xi],\\ I_{\text{пр}}(t),t\in[\xi,T].\end{cases}$$

Причому, оптимальне керування за інвестиціями $I_{\text{оп}}$ є кусково-неперервною функцією на $[t_0,T]$, а оптимальна траєкторія за капіталом $K_{\text{оп}}$ – неперервною та кусково-диференційованою на $[t_0,T]$ функцією.

*Т е о р е м а.* Нехай вхідна інформація економіко-математичної моделі (1)-(5) задовольняє умови:

1) детерміновані сталі: $\mu\in(0,1)$, $\alpha$, $\beta$, $t_0\ge 0$, $T>t_0$, $K_T>0$, $p>0$, $\delta\ge 0$, $\lambda$; випадкова стала $K_0>0$;

2) детермінована функція $L(t)=L_0e^{n(t-t_0)}$, де $L_0>0$, $n>0$;

3) виробнича функція: $F(K\ge 0,L\ge 0)\ge 0$ – двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча по $K$ і $L$, увігнута по $K$ і $L$ та $F(0,0)=F(K,0)=F(0,L)=0$;

4) функція інвестиційних витрат $U(I\ge 0)\ge 0$ – двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча та вгнута;

5) задача ЛПП (14) має розв'язок.

Тоді стохастична економіко-математична модель (1)-(5) має оптимальний процес. Причому, оптимальне керування за інвестиціями $I_{\text{оп}}$ є кусково-неперервною функцією на $[t_0,T]$, а оптимальна траєкторія $K_{\text{оп}}$ – неперервною та кусково-диференційованою функцією на $\left[t_0, T\right]$.

При стохастичному моделюванні необхідно знати довірчі проміжки за заданою ймовірністю середнього значення та дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимальної траєкторії за капіталом.

Нехай проведено обчислювальний експеримент з визначення оптимальної траєкторії за капіталом і отримано $N$ ансамблів оптимальної траєкторії за капіталом $K_{\text{оп}}^{(i)}(t)$, $t \in \left[t_0, T\right]$, $i = \overline{1, N}$.

Обчислимо вибіркові статистики для оптимальної траєкторії за капіталом [18, с. 213]:

– вибіркове середнє

$$\overline{K}_{\text{оп}}(t) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} K_{\text{оп}}^{(i)}(t), \; t \in \left[t_0, T\right],$$

– вибіркова дисперсія

$$S_{K_{\text{оп}}}^2(t) = (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left( K_{\text{оп}}^{(i)}(t) - \overline{K}_{\text{оп}}(t) \right)^2, \; t \in \left[t_0, T\right].$$

Зауважимо, що середня вибіркова для оптимальної траєкторії за капіталом $\overline{K}_{\text{оп}}(t)$ дорівнює середній оптимальній траєкторії за капіталом $K_{\text{оп}}^{(c)}(t)$, $t \in \left[t_0, T\right]$, вище визначеній, тобто $\overline{K}_{\text{оп}}(t) = K_{\text{оп}}^{(c)}(t)$, $t \in \left[t_0, T\right]$.

Довірчим проміжком за заданою ймовірністю $\theta \in (0;1)$ для дисперсії оптимальної траєкторії за капіталом є [18, с. 219]:

$$\left( \frac{(N-1) S_{K_{\text{оп}}}^2(t)}{\chi_{\theta/2,(N-1)}^2}; \frac{(N-1) S_{K_{\text{оп}}}^2(t)}{\chi_{1-\theta/2,(N-1)}^2} \right),$$

де $\chi_{1-\theta/2,(N-1)}^2$ $\left[\chi_{\theta/2,(N-1)}^2\right]$ – $(1-\theta/2)$ – квантиль розподілу Пірсона $\chi^2$ з $(N-1)$ ступенями вільності при заданому довірчому рівні $\theta \in (0;1)$ (таблиця [18, с. 238-239]).

Тоді довірчий проміжок за заданою ймовірністю $\theta \in (0;1)$ для реальних значень оптимальної траєкторії за капіталом $K_{\text{оп}}^{(p)}(t)$ набуває вигляду

$$K_{\text{оп}}^{(p)}(t) \in \left( K_{\text{оп}}^{(c)}(t) - \frac{t_{\theta,(N-1)} S_{K_{\text{оп}}}(t)}{\sqrt{N}}; K_{\text{оп}}^{(c)}(t) + \frac{t_{\theta,(N-1)} S_{K_{\text{оп}}}(t)}{\sqrt{N}} \right), \; t \in \left[t_0, T\right],$$

де $t_{\theta,(N-1)}$ – $\theta$-квантиль розподілу Стьюдента з $(N-1)$ ступенями вільності при заданому довірчому рівні $\theta \in (0;1)$ (таблиця [18, с. 236-237]).

**Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку.**

1. Запропонована стохастична модель поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції та проведено її дослідження.

2. Для запропонованої стохастичної моделі проведено опис оптимального процесу.

3. У запропонованій стохастичній моделі магістаральне, праве та відповідно оптимальне керування за інвестиціями і момент перемикання керування мають детермінований характер і не залежать від коефіцієнта при прирості вінерівського процесу в стохастичній динаміці капіталу. На основі побудованої моделі можна побудувати інші модифікації такої моделі, наприклад, моделі із запізненням, які будуть формалізувати та вдосконалювати комплекс системних досліджень у даній галузі.

Таке макроекономічне моделювання дає можливість виявити загальні закономірності та особливості поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції, відтвореної розробленими моделями, підвищити адекватність прогнозування поведінки фірми та відповідно прийняття рішень.

**Список використаних джерел:**

1. Григорків В. С. Моделювання економіки : навчальний посібник / В. С. Григорків. – Чернівці : ЧНУ, 2009. – 320 с.

2. Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці / В. С. Григорків. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – 200 с.

3. Афанасьев В. Н. Математическая теория конструирования систем управления : Учебник для вузов / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – 2-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 1998. – 574 с.

4. Перестюк М. О. Задачі оптимального керування : навчальний посібник / М. О. Перестюк, О. М. Станжицький, О. В. Капустян. – К. : ТВ і МС, 2004. – 55 с.

5. Основы теории оптимального управления : Учебное пособие для экономических вузов / В. Ф. Кротов, Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов и др.; Под ред. В. Ф. Кротова. – М. : Высшая школа, 1990. – 430 с.

6. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике : Учебное пособие / Б. А. Лагоша. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 192 с.

7. Айда-заде К. Р. О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций / К. Р. Айда-заде, А. Б. Рагимов // Автоматика и вычислительная техника. – 2007. – Т. 41, №1. – С. 27-36.

8. Quincampoix M. Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances / M. Quincampoix, V.M. Velov // SIAM Jormal on Contriol and Optimization. – 2004. – Vol. 43, №4. – Pp. 1373-1399.

9. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, Е. Б. Колмановский, Л. У. Шайхет. – М. : Наука, 1992. – 336 с.

10. Бойчук М. В. Стохастическая модель оптимальной однопродуктовой экономики роста при нелинейном эколого-экономическом критерии с винеровскими и пуассоновскими процессами / М. В. Бойчук, А. Р. Семчук // Проблемы управления и информатики, 2015. – №3. – С. 136-148.

11. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів: [навч. посібник] / А. В. Скороход – К. : Либідь, 1990. – 168 с.

12. Бойчук М. В. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора : монографія / М. В. Бойчук, А. Р. Семчук. – Чернівці : Місто, 2012. – 208 с.

13. Ясинський В. К. Основи обчислювальних методів / В. К. Ясинський. – Чернівці : Золоті литаври, 2005. – 396 с.

14. Бейко И. В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И. В. Бейко, Б. Е. Бублик, П. Н. Зинько. – К. : Вища школа, 1983. – 512 с.

15. Никитин Н. Н. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных

уравнений и оценка их погрешности / Н. Н. Никитин, В. Д. Разевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18. – №1. – С. 106-117.

16. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.

17. Богаєнко І. М. Математичне програмування : Навчальний посібник / І. М. Богаєнко, В. С. Григорків, М. В. Бойчук, М. О. Рюмшин. – К. : Логос, 1996. – 266 с.

18. Эконометрика. Начальный курс.: Учеб. / [Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий]. – 2-е изд., испр. – М. : Дело, 1998. – 248 с.

**Myroslav Boichuk**, PhD, Associate Professor,
**Olena Vinnychuk**, PhD, Associate Professor,
**Igor Vinnychuk**, PhD
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,
Chernivtsi

## STOCHASTIC MODELING AND OPTIMIZATION OF BEHAVIOR OF FIRM AND UNDER THE CONDITIONS OF PERFECT COMPETITION

*Summary*

A stochastic model of firm behavior under the conditions of perfect competition in the Wienerian and Poisson processes is proposed. The final output of production is the production function of capital and labor resources (labor), which are changing according to the exponential law, namely, the production function is monotonous growing and concave in its arguments. The stochastic economic-mathematical model includes the function of investment costs, which depends on gross investment and is monotonously growing and concave. The criterion for the goal is to maximize the average (integral) discounted profit as the difference between output and investment costs.

To study such a stochastic economic-mathematical model, so-called stochastic conditions of optimality are used. Conditions are established on the input information of a stochastic economic-mathematical model in which this model has an optimal process. A description of the structure of the optimal process is carried out and a confidence interval is given for the given probability for the real values of the optimal trajectory for capital.

*Keywords:* stochastic modeling, perfect competition, main process, switching point of control, optimal process.

**References:**

1. Hryhorkiv, V.S. (2011). *Modeliuvannia ekonomiky* [The economic modelling], ChNU, Chernivtsi, 200 p. (in Ukr).

2. Hryhorkiv, V.S. (2011). *Optymal'ne keruvannia v ekonomitsi* [Optimal control in economy], ChNU, Chernivtsi, 200 p. (in Ukr).

3. Afanas'ev, V.N., Kolmanovskij, V.B., Nosov, V.R. (1998). *Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija* [Mathematical theory of the control systems design], 2 nd ed., Vysshaja shkola, Moscow, 574 p. (in Russ.).

4. Perestiuk, M.O., Stanzhyts'kyj, O.M., Kapustian, O.V. (2004). *Zadachi optymal'noho keruvannia* [The optimal control problems], TV and MS, Kyiv, 55 p. (in Ukr.).

5. Krotov, V.F, Lagosha, B.A, Lobanov, S.M. (1990). *Osnovy teorii optimal'nogo upravlenija* [Foundations of Optimal Control Theory], Vysshaja shkola, Moscow, 430 p. (in Russ.).

6. Lagosha, B.A. (2003). *Optimal'noe upravlenie v jekonomike* [The optimal control in economics], Finansy i statistika, Moscow, 192 p.

7. Ajda-Zade, K.R., Ragimov, A.B. (2007). Solution of optimal control problem in class of piecewise-constant functions. *Avtomatika i vychislitel'naja tehnika [Automation and Computer Engineering]*, vol. 41, pp. 27-36 (in Russ.).

8. Quincampoix, M., Velov, V.M. (2004). Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 43, pp. 1373-1399.

9. Andreeva, E.A., Kolmanovskij, E.B., Shajhet, L.U. (1992). *Upravlenie sistemami s posledejstviem* [Aftereffect system management], Nauka, Moscow, 336 p. (in Russ.).

10. Bojchuk, M.V., Semchuk, A.R. (2015). Stochastic model of optimal single-product growth economy with nonlinear environmental-economic criteria with Wiener and Poisson processes. *Problemy upravlenija i informatiki [Problems of controls and informatics]*, vol. 3, pp. 136-148.

11. Skorokhod, A. V. (1990). Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv [Lectures on the theory of random processes], Lybid, Kyiv, 168 p.

12. Bojchuk, M.V., Semchuk, A.R. (2012). *Modeliuvannia ta optymizatsiia povnoho tsyklu odnoproduktovoi makroekonomiky zrostannia z urakhuvanniam ekolohichnoho faktora* [Simulation and optimization of the complete cycle of one-product macroeconomics growth taking into account the ecological factor], Misto, Chernivtsi, 208 p. (in Ukr.).

13. Yasyns'kyj, V. K. (2005). *Osnovy obchysliuval'nykh metodiv* [Fundamentals of computing methods], Zoloti lytavry, Chernivtsi, 396 p. (in Ukr.).

14. Bejko, I.V., Bublik, B.E., Zin'ko, P.N. (1983). *Metody i algoritmy reshenija zadach optimizacii* [Methods and algorithms for optimization problems solving], Vyscha shkola, Kyiv, 512 p. (in Russ.).

15. Nikitin, N.N., Razevich, V.D. (1978). Digital simulation methods for stochastic differential equations and estimation of their error. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, vol. 18, pp. 106-117 (in Russ.).

16. Akulich, I.L. (1986). *Matematicheskoe programmirovanie v primerah i zadachah* [Mathematical programming in examples and problems], Vysshaja shkola, Moscow, 319 p. (in Ukr.).

17. Bohaienko, I.M., Hryhorkiv, V.S., Bojchuk, M.V., Riumshyn, M.O. (1996). *Matematychne prohramuvannia* [Mathematical programming], Lohos, Kyiv, 266 p. (in Ukr.).

18. Magnus, Ja.R., Katyshev, P.K., Pereseckij, A.A. (1998). *Jekonometrika* [Econometrics], 2nd ed., Delo, Moscow, 248 p. (in Russ).

**УДК 519.866:332.7**

**О.Ю. Вінничук**, к.е.н., доцент,
**Л.В. Скращук**, к.е.н., асистент,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
м. Чернівці

## МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО РОСТУ В УМОВАХ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНОЇ РІВНОВАГИ

*Анотація*

Побудовано нелінійну модель економічного росту екологічно збалансованої економіки з використанням гіпотез щодо побудови моделей економічного росту рамсеївського типу, доповнених гіпотезами про те, що інвестиції обов’язково розподіляються як у матеріальне виробництво, так і у допоміжне виробництво, та вважаючи, що вони повністю витрачаються на приріст відповідного капіталу і його амортизації, а ступінь забрудненості з часом спадає відповідно до експоненціальної функції. Запропонована в цій праці модель оптимального економічного росту в умовах екологічної рівноваги дозволяє вивчити оптимальні траєкторії економічного росту екологічно збалансованої економіки. Модель математично досліджено за допомогою так званих достатніх умов оптимальності та обґрунтовано структуру їх оптимальних розв’язків. Отримані у результаті експериментальних досліджень з моделлю рекомендації можуть бути корисними як для подальших теоретичних досліджень, так і для прийняття практичних рішень в економіці.

*Ключові слова*: економічний ріст, еколого-економічна рівновага, модель оптимального керування, оптимальний процес, оптимальні траєкторії.