УДК 378.147:510
JEL Classification: C61, D22
DOI: *http://doi.org/10.34025/2310-8185-2021-1.81.08*

Б.М. Дрінь, к.п.н., доцент,
https://orcid.org/0000-0001-6708-2555
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
м. Івано-Франківськ,
І.І. Дрінь, к.ф.-м.н., доцент,
https://orcid.org/0000-0002-0258-7007
Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ, м. Чернівці,
С.С. Дрінь, к.ф-.м.н,,
https://orcid.org/0000-0002-5576-3756
Національний університет «Києво-Могилянська академія», м. Київ

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ ДВОХ КОНКУРЕНТНИХ ФІРМ

Анотація

Актуальність. Для економіки основним методом є моделювання економічних явищ та процесів, передусім математичне моделювання, зумовлене наявністю стійких кількісних закономірностей і можливістю формалізованого опису багатьох економічних процесів. Економіко-математична модель містить систему рівнянь лінійних і нелінійних членів для математичного опису економічних процесів та явищ. Динамічні моделі економіки описують економіку в розвитку, а математичний опис динамічних моделей здійснюється з допомогою різних рівнянь. Дослідження економічних проблем призвело до розвитку математичного апарату. У нашій статті динамічна математична модель побудована на основі припущення, що обсяг виробленої продукції обох фірм зумовлюються такими факторами, від яких випуск продукції залежить лінійно: обсягом виробленої продукції кожною фірмою, зносом обладнання, що призводить до зменшення обсягу виробництва кожною стороною та нелінійними факторами, що є певним ступенем недовіри конкуруючих між собою фірм. До цієї моделі вперше включено нелінійні фактори, які глибше описують рівень недовіри конкурентів і залежать від часу спостережень та обсягів виробництва у попередні моменти часу, адже останні суттєво впливають на виробничу діяльність фірми

Мета дослідження – проаналізувати динамічну економічну поведінку двох конкуруючих об’єктів, математичною моделлю якої є нелінійна нелокальна задача для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та відхиленням аргументу. **Методологія.** У процесі виконання досліджень динамічної поведінки двох конкуруючих об'єктів, що описуються нелінійною системою диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, використовується метод кроків. Це дає можливість дослідникам краще зрозуміти власне постановку задачі, застосувати метод кроків при моделюванні складніших економічних процесів.

Результатами досліджень є опис процесу конкуренції двох фірм, розв'язування нелокальної задачі і аналіз отриманого розв'язку на кожному етапі застосування методу кроків. Метод математичної індукції дозволяє продовжити розв'язок на довільний часовий інтервал.

Практичне значення. Завдяки обчислювальній техніці та побудованим математичним моделям грамотний дослідник (який знає закони розвитку природи) може зрозуміти поведінку нових процесів чи явищ, напрямки їхнього розв'язку, стабільність тощо. **Перспектива подальших досліджень.** У формуванні навичок та прийомів дослідження задач з використанням сучасних інформаційних технологій на базі інформаційно-логічного моделювання дослідникам суттєво допоможуть сучасні математичні моделі економіки й екології.

Ключові слова: математична модель, динаміка, обсяг виробництва, запізнення часової змінної, конкуруючі фірми.

Кількість джерел – 17.

Bohdan Drin, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
https://orcid.org/0000-0001-6708-2555
Vasyl Stefanyuk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk
Iryna Drin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor,
https://orcid.org/0000-0002-0258-7007
Chernivtsi Institute of Trade and Economics of KNTEU, Chernivtsi
Svitlana Drin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
https://orcid.org/0000-0002-5576-3756
National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv

THE NONLINEAR MODEL OF BEHAVIOR OF TWO COMPETITIVE FIRMS

Summary

The practical task of economics lies in applying the methods of substantiating its decisions. For economics, the main method is the modeling of economic phenomena and processes and, above all, mathematical modeling, which has been stipulated by the presence of stable quantitative patterns and the possibility of a formalized description of many economic processes**.**

The economic-mathematical model contains a system of equations of linear and nonlinear units that promote a mathematical description of economic processes and phenomena, consists of a set of variables and parameters and serves to study these processes and control them. Dynamic models of the economy describe it in development, as well as provide a detailed description of technological methods of production. Mathematical description of dynamic models is carried out with the use of a system of differential equations (in models with continuous time), difference equations (in models with discrete time), as well as systems of algebraic equations. It is important that the investigation of various economic issues has led to the development of the mathematical apparatus. In linear algebra, productive matrices are caused by the studies of intersectoral balance, whereas mathematical programming arose in the course of researching the optimal plan for the distribution of limited resources. In a similar way, there emerged the theory of economic indices and econometrics, the theory of production functions and the theory of consumption, the theory of general economic balance and social welfare, the theory of optimal economic growth.

The paper under studies deals with the dynamic economic behavior of two competing objects, whose mathematical model is a nonlinear nonlocal problem for a system of ordinary differential equations with variable coefficients and argument deviation. The dynamic mathematical model is based on the assumption that the volume of output of both firms is determined by such factors on which output depends linearly. The model under discussion includes nonlinear factors, which describe the level of distrust of the competitors and depend on the time of observations and production volumes in previous moments, because the latter significantly affect the production activities of the firm. Such mathematical models are called time-delayed models.

Keywords: mathematical model, dynamics, volume of output, time-delayed models, competing firms.

Number of sources – 17.

Постановка проблеми. Практичне завдання економіки полягає у використанні методів обґрунтування і вибору своїх рішень. Для економіки основним методом є моделювання економічних явищ та процесів, передусім математичне моделювання, зумовлене наявністю стійких кількісних закономірностей і можливістю формалізованого опису багатьох економічних процесів.

Економіко-математична модель містить систему рівнянь лінійних і нелінійних членів для математичного опису економічних процесів та явищ, складається із набору змінних та параметрів і служить для дослідження цих процесів і управління ними. Динамічні моделі економіки описують економіку в розвитку, тобто при зміні часу і містять опис технологічних способів виробництва, тобто із певного набору ресурсів можна за одиницю часу виробити набір продуктів. Математичний опис динамічних моделей здійснюється з допомогою системи диференціальних рівнянь (в моделях з неперервним часом), різницевих рівнянь (у моделях з дискретним часом), а також систем алгебраїчних рівнянь. Зауважимо також, що дослідження економічних проблем призвело до розвитку математичного апарату. В лінійній алгебрі продуктивні матриці зумовлені дослідженням міжгалузевого балансу, а математичне програмування виникло при дослідженні оптимального плану розподілу обмежених ресурсів. Аналогічно зародилася теорія економічних індексів та економетрика, теорія виробничих функцій та теорія споживання, теорія загальної економічної рівноваги і суспільного благополуччя, теорія оптимального економічного зростання.

Мета дослідження. Проаналізовано динамічну економічну поведінку двох конкуруючих об’єктів, математичною моделлю якої є нелінійна нелокальна задача для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та відхиленням аргументу. Динамічна математична модель побудована на основі припущення, що обсяг виробленої продукції обох фірм зумовлюються такими факторами, від яких випуск продукції залежить лінійно: обсягом виробленої продукції кожною фірмою, зносом обладнання, що призводить до зменшення обсягу виробництва кожною стороною та нелінійними факторами, що є певним ступенем недовіри конкуруючих між собою фірм. До цієї моделі вперше включено нелінійні фактори, які глибше описують рівень недовіри конкурентів і залежать від часу спостережень та обсягів виробництва у попередні моменти часу, адже останні суттєво впливають на виробничу діяльність фірми. Такі математичні моделі називаються моделями із врахуванням запізнення за часом. Сюди входить і оновлена модель гонки озброєнь, яка раніше також не вивчалася в такій постановці.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Особливим пізнавальним методом науки є моделювання, коли дослідник замість досліджуваного об'єкта пізнання обирає чи створює подібний допоміжний об'єкт – модель, досліджує його, а отримані результати переносить на об'єкт-оригінал. Процес моделювання має творчий характер, і для аналізу й синтезу систем управління в економіці залежно від мети дослідження використовують різні економіко-математичні методи та моделі [1–4]. Реальні економічні процеси і системи не піддаються прямому експерименту, важко піддаються дослідженню звичайними теоретичними методами, адже ціна помилок досить велика, тому математичне моделювання є неминучою складовою сучасної економічної науки і науково-технічного процесу загалом [5–8]. Найпершим об'єктом математичного моделювання була, мабуть, популяція. У 1202 році Леонардо Пізанський (Фібоначчі), виходячи з кількості кроликів (два), підрахував кількість їх через наступні послідовні покоління: 2, 4, 6, 10… Таким чином з'явилися так звані числа Фабоначчі, що вираховуються за рекурентною формулою $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Говорячи про застосування математики в економіці, слід зауважити, що на сьогодні економіст, який не володіє методологією побудови економіко-математичних моделей, не може описати економічний процес і дослідити напрями його розвитку, не є фахівцем у цій галузі. Також слід зауважити, що ще в 1494 році італійський чернець і математик Лука Пачолі (Fra Luka Bartolomeo de Picioli) заснував принцип сучасного бухгалтерського обліку (подвійний запис, дебет, кредит, баланс тощо) [9; 10]. Франсуа Кене, французький економіст, відомий своєю працею «Економічна таблиця» (1758 р.), запровадив термін «економічний аналіз» [11]. Значно грунтовніше застосування математичних методів в економіці почало вивчатись з роботи французького вченого Антуана Курно [12], який вперше використав кількісні методи для аналізу конкуренції між товарами у різних ринкових ситуаціях, побудував динамічну модель дуополії. До кінця XIX століття вже складається самостійний математичний напрямок дослідження в економіці, українським представником якого є математик, статистик та економіст Є. Слуцький (1880–1948). Його праця «До теорії збалансованого бюджету споживання» була вперше опублікована у 1915 році, і саме її вважають базовою в теорії споживання.

У XX столітті виникає теорія виробничих функцій американських вчених – математика Ч. Кобба та економіста П. Дугласа, які у 1928 році опублікували свою статтю «Теорія виробництва». Автори вперше емпіричним шляхом визначили вплив капіталу та трудових ресурсів на обсяг виробленої продукції. У моделях Вальраса та Еванса описана ринкова економіка. До моделей соціальних та глобальних процесів відноситься модель гонки озброєнь [13]. У праці [14] розроблено динамічну лінійну математичну модель, призначену для дослідження динаміки економічного процесу з регулюванням обсягів виробництва у різні моменти часу (нелокальні умови регулювання). У праці [15] досліджено математичне моделювання деяких лінійних систем та процесів. Метою даної праці є введення в лінійну модель нелінійних факторів, які тлумачаться як ступінь недовіри конкуруючих між собою фірм, глибше описують їх рівень недовіри і вперше враховують обсяг виробництва у різні моменти часу (такі моделі є задачами з відхиленням аргумента).

Постановка задачі. Нехай $h>0$ – число, t – час $t \geq h > 0, x_1(t), x_2(t)$ – обсяг виробленої продукції двома конкуруючими фірмами $x_i(t) \geq 0\,(i=1,2)$, $p_{ij}(t)\,(i,j=1,2)$ – коефіцієнти, що впливають на обсяг виробництва. $\frac{dx_i(t)}{dt}(i=1,2)$ характеризують швидкості (темпи) зміни обсягів виробництва, $f_i,(i=1,2)$ описують рівні недовіри конкурентів, які залежать від t та обсягів виробництва

$x_i(t-\tau)(i=1,2)$ у попередні моменти часу тому, що, наприклад, існує проміжок часу $\tau>0$ на якому обсяг виробленої продукції $x_i(t-\tau)(i=1,2)$ в момент часу $t-\tau$ впливає на обсяг $x_i(t)(i=1,2)$ в момент часу t, враховуючи відповідну поведінку конкурентів. Функції $f_i(t,x_1(t-\tau),x_2(t-\tau)),(i=1,2)$ вважаємо неперервними нелінійними функціями своїх аргументів.

Припускаючи, що темпи приросту обсягів виробництва і зміна самих обсягів виробництва лінійно залежить від вказаних факторів, отримаємо таку математичну модель:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = p_{11}(t)x_1(t) + p_{12}(t)x_2(t) + f_1(t, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)\,), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = p_{21}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t) + f_2(t, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)\,), \\ \qquad x_i(t)|_{0\le t\le h} = \varphi_i(t), (i=1,2), \end{cases} \quad (1),$$

$h>0, t\ge h>0, p_{ik}(t)(i,k=1,2)$ - відомі функції дійсного аргумента t неперервні в деякому інтервалі $[hT]$ зміни $t, \varphi_i(t)$ – неперервні при $0\le t\le h$.

При відомих коефіцієнтах $p_{ij}(t)(i,j=1,2)$ і рівнях недовіри конкурентів f_i треба дослідити виробничу поведінку фірми $x_i(t)(i=1,2)$ яка описується задачею (1). Зауважимо, що нелокальною задачею (1) можна змоделювати гонку озброєнь між двома країнами, яка в лінійному випадку описана в [13]. Моделювання економіки описане в [14], [15], [16].

Виклад основного матеріалу. Задача (1) є нелінійною задачею, що описується системою диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами і нелокальною умовою, розв’язок якої будується методом кроків. На кожному кроці випливає задача, алгоритм розв’язування якої такий: для лінійної однорідної частини системи (1) будуємо інтегральну матрицю та матрицант, який застосовується для знаходження загального розв'язку лінійної неоднорідної системи.

Інтегральна матриця. Ввівши позначення

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix}, P(t) = \begin{Vmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{Vmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

лінійну однорідну частину системи (1) можна переписати коротко так:

$$\frac{dX(t)}{dt} = P(t)\, X(t),\ 0 < t < T \qquad (2).$$

Означення: Інтегральною матрицею системи (2) називається квадратна матриця $\tilde{X}(t) = \begin{Vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{Vmatrix}$, стовпчики якої є неперервно диференційовними функціями для $0 < t < T$ і є лінійно незалежними розв'язками вихідної системи (2).

Якщо позначити

$$\frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = \begin{Vmatrix} \frac{dx_{11}(t)}{dt} & \frac{dx_{12}(t)}{dt} \\ \frac{dx_{21}(t)}{dt} & \frac{dx_{22}(t)}{dt} \end{Vmatrix},\ \ 0 < t < T,$$

і записати матричне рівняння

$$\frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = P(t)\, \tilde{X}(t), \qquad (3)$$

то за сформульованих умов на коефіцієнти системи (1) теорема про коректну розв'язність системи лінійних диференціальних рівнянь гарантує, що інтегральна матриця існує, але визначається неоднозначно. Якщо додати початкову умову $X(t_0) = X_0$, де X_0 – відома числова матриця, t_0 – початкове значення в області зміни t зокрема $X(t_0) = E$, де E – одинична матриця, тоді інтегральна матриця визначається однозначно і називається нормальною інтегральною матрицею. Правильною є така теорема про загальний розв'язок рівняння (3).

Теорема 1. Нехай $\tilde{X}'(t)\left(\left|\tilde{X}'(t)\right| \neq 0\right)$ є невиродженим частинним розв'язком рівняння (3), то його загальний розв'язок $X(t)$ є добутком

$$\tilde{X}(t) = C\tilde{X}'(t) \tag{4}$$

де C – довільна стала матриця.

Матрицант. За сформульованих умов на коефіцієнти рівняння (3) нормований розв'язок матричного рівняння (3) будуємо методом послідовних наближень $\tilde{X}_k(t), k = 0,1,2, \ldots$[17], вибираючи як нульове наближення $\tilde{X}_0$ одиничну матрицю E. Оскільки будується нормований розв'язок, то усі наближення $\tilde{X}_k(t)$ задовольняють умову $\tilde{X}_k(t_0) = E, (k = 0,1,2, \ldots)$. Тоді

$$\tilde{X}_k(t) = E + \int_{t_0}^{t} P(t)\tilde{X}_{k-1}(t)dt \quad (k = 1,2, \ldots).$$

Отже, $X_k(t), k = 0,1,2, \ldots$ є сумою перших k+1 членів матричного ряду

$$E + \int_{t_0}^{t} P(t)dt + \int_{t_0}^{t} P(t)dt \int_{t_0}^{t} P(t_1)dt_1 + \cdots \qquad (5).$$

Розв'язок системи (3), визначений рядом (5), позначимо

$$\Omega_{t_0}^{t}(P(t)) \equiv E + \int_{t_0}^{t} P(t)dt + \int_{t_0}^{t} P(t)dt \int_{t_0}^{t} P(t_1)dt_1 \ldots \tag{6}$$

(або $\Omega_{t_0}^{t}$). Тоді загальний розв'язок системи (3) набуває вигляду

$$\tilde{X}(t) = \Omega_{t_0}^{t}(P)C, \tag{7}$$

де C – довільна стала матриця розміру 2x2. Отже, довільний розв'язок системи (3), зокрема і нормований, однозначно визначений своїм значенням при $t = t_0$.

Нормований розв’язок $\Omega_{t_0}^{t}(P)$ називається матрицантом системи (3), зображається рядом (6) і збігається абсолютно та рівномірно в довільному замкненому інтервалі $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, де (a, b) область неперервності $P(t)$.

Загальний розв’язок системи (1):

$$X(t) = \Omega_{t_0}^{t}(P)C, \qquad (8)$$

де C – матриця-стовпчик довільних сталих. Отже, доведена така теорема.

Теорема 2. Нормований розв’язок $\tilde{X}(t)$ рівняння (3) визначається рядом (5), а (7) – його загальний розв’язок; загальний розв’язок $X(t)$ рівняння (1) визначається (8), а матриця $\Omega_{t_0}^{t}(P)$ – (6).

Дослідження системи нелінійних рівнянь. Застосуємо побудований матрицант для знаходження загального розв’язку вихідної системи.

Метод кроків. Розглянемо систему (1):

$$\frac{dX(t\,)}{dt} = = P(t)X(t) + f(t, x_1(t-h), x_2(t-h)), t > h, \quad (11)$$

де

$$f(t, x_1(t-h), x_2(t-h)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t-h), x_2(t-h)) \\ f_2(t, x_1(t-h), x_2(t-h) \end{pmatrix}, t > h \quad (10)$$

і початкову умову

$$x_i(t)|_{0 \le t \le h} = x_i^0(t) \qquad (i = 1,2), \qquad (11)$$

де f, x_i $(i = 1,2)$ – відомі неперервні функції.

Задачу (9)-(11) розв’язуємо методом кроків. Нехай $h \le t \le 2h$. Тоді $x_i(t-h) = x_i^0(t)$ $(i = 1,2)$ і

$$f(t, x_1(t-h), x_2(t-h)) = \begin{pmatrix} f_1\left(t, x_1^0(t), x_2^0(t)\right) \\ f_2(t, x_1^0(t), x_2^0(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1^0(t) \\ f_2^0(t) \end{pmatrix} \equiv f^0(t) \quad -$$

відома неперервна вектор-функція, визначена при $h \le t \le 2h$, і ми отримаємо систему лінійних неоднорідних рівнянь на інтервалі

$(h, 2h)$. Враховуючи побудований матрицант $\Omega_h^t(P)$ вигляду (6), розв'язок задачі (9)-(11) набуває вигляду:

$$X(t) = \Omega_h^t(P(t))x^0(t) + \int_h^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ h \le t \le 2h, \quad (12)$$

де $K(t,\tau) = \Omega_h^t(P(t))\left[\Omega_h^\tau\left(P(\tau)\right)\right]^{-1}$, $x^0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \end{pmatrix}, h \le \tau \le t$.

Нехай $2h \le t \le 3h$. Тоді $h \le t - h \le 2h$ та $x_i(t-h) \equiv x_i(t)$ функція вигляду (12), де замість h треба покласти $2h$, а $x_i(t)|_{h \le t \le 2h} \equiv x_i^h(t)\ , t_0 = 2h, f_i \equiv f_i^h(t)\ \ (i = 1,2)$ і розв'язок задачі (9)-(11) набуває вигляду

$$X(t) = \Omega_{2h}^t(P(t))x^h(t) + \int_{2h}^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau,\ 2h \le t \le 3h, \quad (13)$$

$$K(t,\tau) = \Omega_{2h}^t(P(t))\left[\Omega_{2h}^\tau\left(P(\tau)\right)\right]^{-1},$$

$$x^h(t) = \begin{pmatrix} x_1^h(t) \\ x_2^h(t) \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (12), (13), методом математичної індукції доводимо, що при $kh \le t \le (k+1)h$ розв'язком задачі (9)-(11) є функція

$$X(t) = \Omega_{kh}^t(P(t))x^{(k-1)h}(t) + \int_{kh}^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad k = 1,2,\ldots, \quad (14)$$

де

$$K(t,\tau) = \Omega_{kh}^t(P(t))\left[\Omega_{kh}^\tau\left(P(\tau)\right)\right]^{-1},$$

$$x^{(k-1)h}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)h}(t) \\ x_2^{(k-1)h}(t) \end{pmatrix}.$$

Отже, доведена така теорема.

Теорема 3. Розв'язок задачі (9)-(11) знаходиться методом кроків і визначається формулою (14).

Зауваження. Економічне тлумачення умови запізнення за часовою змінною полягає в тому, що обсяги виробництва в різні моменти часу регулюються цією *запланованою* умовою. Початкова умова задає обсяг виробництва на початковому проміжку часу.

Висновки. У цій роботі нами побудована і досліджена модель економічної поведінки двох конкуруючих фірм, коли швидкість приросту і зміна обсягів виробництва у довільні моменти часу залежать від природних факторів, пов'язаних з обсягом виробленої продукції кожною стороною, пропорційною зміні обсягу виробництва, зв'язаних із заміною виробничого обладнання і ступенем недовіри конкуруючих між собою фірм. При формалізації моделі глибше описується рівень недовіри конкурентів і нелінійно залежить від часу спостереження та обсягів виробництва у попередні моменти часу, адже останні суттєво впливають на виробничу діяльність фірми (раніше такі задачі не досліджувалися). Моделі можуть бути використані у режимі комп'ютерної імітації для експериментальних досліджень реальних процесів економічної взаємодії. Такі дослідження дають можливість виявити закономірності та особливості економічної динаміки фірми відтвореної створеними моделями, а користуючись обчислювальною машиною, можна розрахувати її поведінку. Модель дає насамперед розуміння процесу, напрям його розв'язку, стабільність тощо.

Перспектива подальших досліджень. Сучасні математичні моделі економіки, екології мають можливості розширюватися в напрямку збільшення кількості інгредієнтів, розширеного використання комп'ютерів для розв'язку задач із своїх предметних областей. Тому треба формувати у дослідників навички та прийоми дослідження задач з використанням сучасних інформаційних технологій на базі інформаційно-логічного моделювання.

Список використаних джерел:

1. Варфоломеев В. И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: Практикум. Москва : Финансы и статистика, 2000. 208 с.
2. Колемаев В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. Москва : ЮНИТИ, 1998. 240 с.
3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : Навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2009. 408 с.

4. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе : Учеб. пособие для вузов. Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. 367 с.

5. Сидорчук Н. Г. Математичне моделювання як основа побудови системи професійно-педагогічної підготовки студентів університетів у контексті євроінтеграційних процесів // Вісник Житомирського державного університету. 2010. Вип. 49. С. 41–46.

6. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. Москва : Физматгиз, 2001. 316 с.

7. Морозов К. Е. Математическое моделирование в научном познании. Москва : Мысль, 1969. 215 с.

8. Ляшенко І. М., Коробова М. В., Столяр А. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. посібник. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. 304 с.

9. Пачоли Лука. О божественной пропорции / Репринт изд. 1508; с приложением перевода А.И. Щетникова. Москва : Фонд Русский авангард, 2007.

10. Пачоли Лука. Трактат о счетах и записях // Финансы и статистика. 2001. 368 стр.

11. Кене Ф. Избранные экономические сочинения. Москва : Директ медиа, 2007.

12. Баранкевич М. М., Антонів В. А. Вступ до математичної економіки. Фундаментальні моделі. Дрогобич : Коло, 2009. 348 с.

13. Маценко В. Г. Математичне моделювання: Навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2014. 519 с.

14. Дрінь І. І., Дрінь С. С. Математичні моделі глобального економічного процесу з нелокальними умовами // Вісник ЧТЕІ. Економічні науки. 2018. Вип. І–ІІ (69–70). С. 152–158.

15. Дрінь І. І., Дрінь С. С. Про математичне моделювання лінійних систем та процесів // Вісник ЧТЕІ. Економічні науки. 2020. Вип. І (77). С. 125–136.

16. Григорків В. С. Моделювання економіки : Навчальний посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2009. 320 с.

17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва : Наука, 1988. 552 с.

References:

1. Varfolomeev, V.I. (2000). *Algoritmicheskoe modelirovanie elementov ekonomicheskikh system* [Algorithmic modeling of elements of economic systems]. Praktikum, Moskva, 208 p. (in Russ.).

2. Kolemaev, V.A. (1998). *Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical Economics]. UNITI, Moskva, 240 p. (in Russ.).

3. Vitlinskyi, V.V. (2009). *Modeliuvannia ekonomiky* [Modeling of Economy]. KNEU, Kyiv, 408 p. (in Ukr.).

4. Shelobaev, S.I. (2000). *Matematicheskiye metody i modeli v ekonomike, finansakh i bisnese* [Mathematical Methods in Economics, Finance and Business]. UNITI, Moskva, 367 p. (in Russ.).

5. Sydorchuk, N.G. (2010). Mathematical modeling as the basis for building a system of vocational and pedagogical preparation of university students in the context of European integration processes. *Visnyk Zhytomyrs'koho derzhavnoho universytetu [Bulletin of Zhytomyr State University].* ZDU, Zhytomyr, vol. 49, pp. 41–46 (in Ukr.).

6. Samarskii, A.A., Mikhailov, A.P. (2001). *Matematicheskoe modelirovanie. Idei. Metody. Primery* [Mathematical modelling. Ideas. Methods. Examples]. Fizmatgiz, Moskva, 316 p. (in Russ).

7. Morozov, K.E. (1969). *Matematicheskoe modelirovanie v nauchnom poznanii* [Mathematical modeling in scientific knowledge]. Mysl’, Moskva, 215 p. (in Russ.).

8. Liashenko, O. (2006). *Osnovy matematychnogo modelyuvannya ekonomichnyh, ekolohichnyh ta socialnyh processiv* [Basics of mathematical modeling of economic, ecological and social processes]. Navchal’na knyga-Bogdan, Ternopil, 304 p. (in Ukr.).

9. Pacholi, Luca (2007). *O bozhestvennoi proportsii* [On divine proportion]. Russkiy avangard, Moskva (in Russ.)

10. Pacholi, Luca (2001). A treatise on accounts and records. *Finansy i statistika [Finance and statistics]* (in Russ.).

11. Kene, F. (2007). *Izbrannye ekonomicheskie sochineniya* [Selected economic works]. Direct Media, Moskva (in Russ.).

12. Barankevych, M.M., Antoniv, V.A. (2009). *Vstup do matematychnoyi ekonomiky. Fundamentalni modeli* [Introduction to Mathematical Economics. Fundamental models]. Kolo, Drohobych, 348 p. (in Ukr.).

13. Matsenko, V.G. (1988). *Matematychne modellyuvannya* [Mathematical modeling]. ChNU, Chernivtsi, 519 p. (In Ukr.).

14. Drin, I.I., Drin, S.S. (2018). Mathematical models of the global economic process with nonlocal conditions. *Visnyk Chernivets'koho torhovel'no-ekonomichnoho instytutu [Bulletin of the Chernivtsi Trade and Economic Institute],* vol. I–II (69–70), pp. 152–158 (in Ukr.).

15. Drin, I.I., Drin, S.S. (2020). On mathematical modeling of linear systemsand processes. *Visnyk Chernivets'koho torhovel'no-ekonomichnoho instytutu [Bulletin of the Chernivtsi Trade and Economic Institute],* vol. I (77), pp. 125–136 (in Ukr.)

16. Hryhorkiv, V.S. (2009). *Modeliuvannia ekonomiky* [Modeling of Economy]. Chernivetskyi nats. Universytet, Chernivtsi, 320 p. (in Ukr.)

17. Gantmaher, F.R. (1988). *Teoria matryts* [Theory of matrix]. Nauka, Moskva, 552 p. (in Russ.).